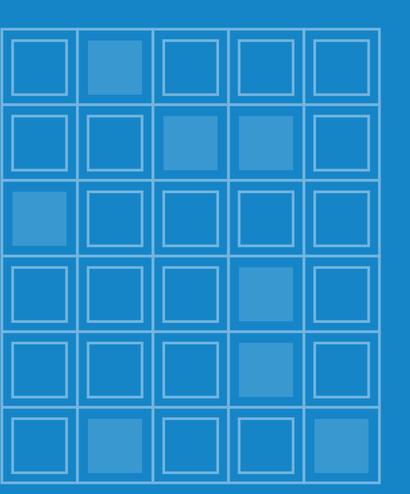


Bachillerato General Unificado





# MATEMÁTICA



## 3.º BGU

**TEXTO DEL ESTUDIANTE**

MINISTERIO DE EDUCACIÓN









# PRESENTACIÓN

Las páginas de este texto reflejan la suma de voluntades más importante del país en torno a la Educación. En ellas se conjuga el esfuerzo de millones de estudiantes que día a día asisten a clases y también el de sus padres, madres, maestros y autoridades. Cada uno de estos actores, desde su espacio, apuntalan la construcción de esa sociedad de oportunidades y de justicia que aspiramos todos los ecuatorianos.

En el Ministerio de Educación trabajamos arduamente para favorecer el desarrollo integral de todos los estudiantes del país. El reto es enorme, pero lo asumimos con absoluta responsabilidad, sabiendo que contamos con el apoyo y compromiso de miles de educadores, héroes silenciosos que son referentes de vida para las niñas, niños y adolescentes.

Nuestras líneas de trabajo están enfocadas a obtener los siguientes resultados:

Lograr que el acceso a la educación y la permanencia en el sistema educativo sean derechos efectivos de todos los estudiantes. Lo más importante para esta Cartera de Estado es que todos nuestros estudiantes alcancen sus metas educativas y estén listos para asumir nuevos retos en su vida adulta. Y éste es el motivo por el que también mantenemos las puertas abiertas para los adultos que no tuvieron la oportunidad de concluir sus estudios.

Generar las mejores condiciones de aprendizaje para formar agentes transformadores de la sociedad, capaces de manifestar sus ideas y empoderarse de sus derechos y responsabilidades.

Propiciar una cultura de diálogo y participación dentro de la escuela, que tanta falta hace en nuestra sociedad. Creemos en el gran potencial de las ideas de las niñas, niños y adolescentes. Por ello, creamos espacios de participación para formular políticas públicas que garanticen sus derechos.

Impulsar estrategias participativas con todos los actores de la comunidad educativa, para fomentar valores como el respeto, la tolerancia, la solidaridad, la honestidad y la equidad. Aprender a vivir armónicamente es un saber tan importante como cualquier asignatura.

Estos resultados solo se pueden alcanzar con el compromiso de todos; involucrarse es el gran primer paso.

La educación siempre será una buena noticia para todos los ecuatorianos, juntos soñamos, juntos construimos.

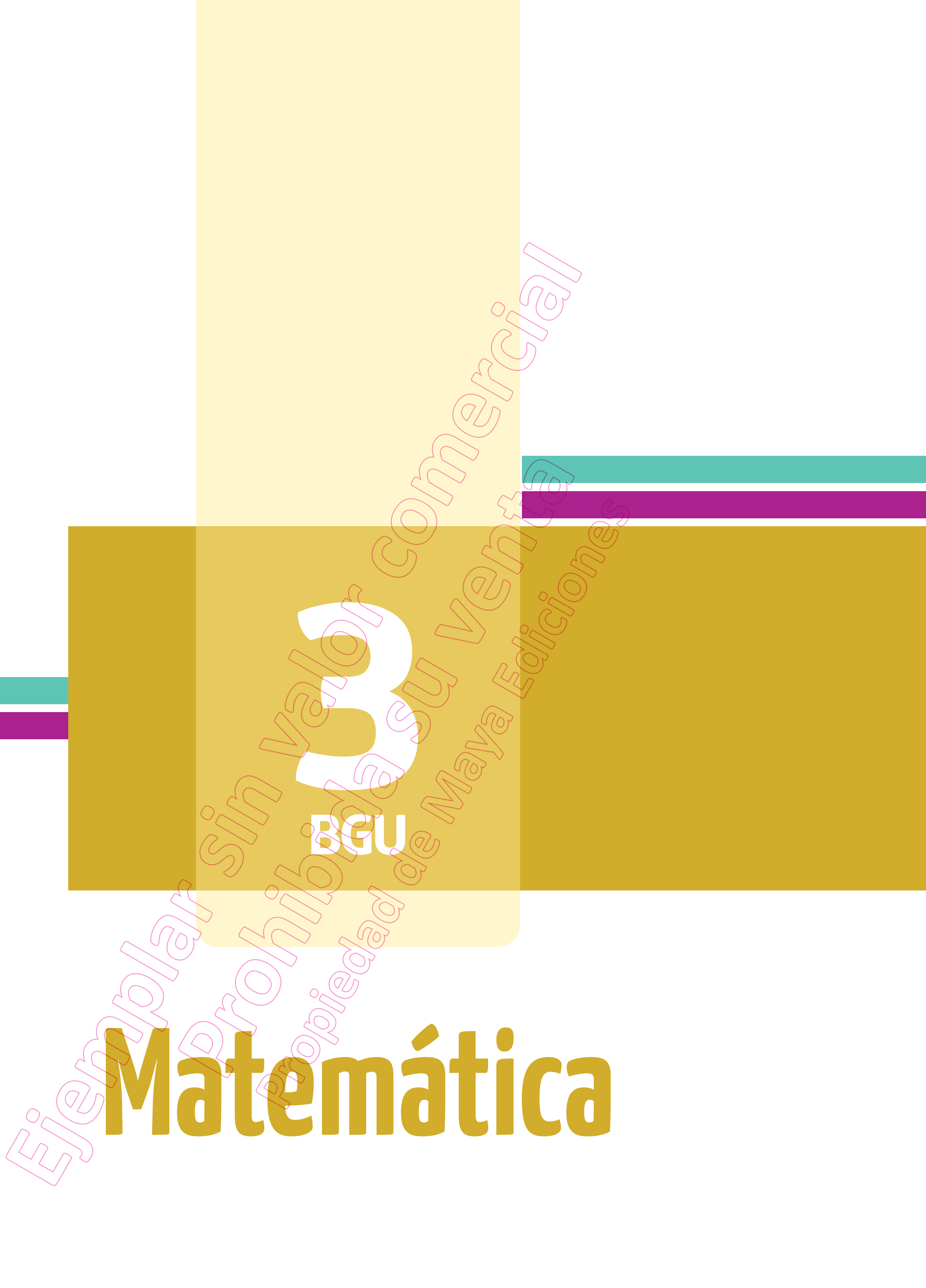
Gracias por ser parte de este gran proyecto.

**Monserrat Creamer**
**Ministra de Educación**










# Matemática

Texto del alumno

**Primera impresión**
Marzo 2020
**Impreso por:**













**MAYA EDICIONES CÍA. LTDA.**

**Dirección general**
Patricio Bustos Peñaherrera
**Edición general**
Juan Páez Salcedo
**Autoría**
Guillermo Benalcázar Gómez
**Coordinación editorial**
Soledad Martínez Rojas
**Dirección de arte**
Paulina Segovia Larrea
**Diseño y diagramación**
Equipo de diseño Maya Ediciones
**Investigación gráfica**
Flavio Muñoz Mejía
**Investigación TIC**
Fernando Bustos Cabrera
**Terminación y acabados**
Santiago Carvajal Sulca
**Ilustraciones**
Archivo editorial y sitios web debidamente referidos
**Fotografías**
Shutterstock, archivo editorial y sitios web debidamente referidos

Nº de derecho de autor QUI-057207
de 13 de septiembre de 2019

ISBN: 978-9978-52-331-5

Este libro fue evaluado por la Universidad SEK, mediante **ACUERDO Nro. MINEDUC-SFE-2017-00063-A**, con fecha 18 de octubre de 2017.


Av. 6 de Diciembre N52-84 y José Barreiro
Teléfono: 02 510 2447
coordinacion@mayaeducacion.com
www.mayaeducacion.com
Quito, Ecuador

MINISTERIO DE EDUCACIÓN


Av. Amazonas N34-451 y Av. Atahualpa
Quito-Ecuador
www.educacion.gob.ec



**ADVERTENCIA**
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

# Índice





BC 1 — **Bloque Curricular 1:** Algebra y funciones

BC 2 — **Bloque Curricular 2:** Geometría y medida

BC 3 — **Bloque Curricular 3:** Estadística y Probabilidad

# Índice



**BC 1** **Bloque Curricular 1:** Álgebra y funciones
**BC 2** **Bloque Curricular 2:** Geometría y medida
**BC 3** **Bloque Curricular 3:** Estadística y Probabilidad

# Conoce tu libro

## Apertura de unidad

Contiene: título de unidad, fotografía motivadora relacionada con los temas que se tratarán, texto introductorio, preguntas de comprensión y de lectura de imagen, objetivos de unidad.



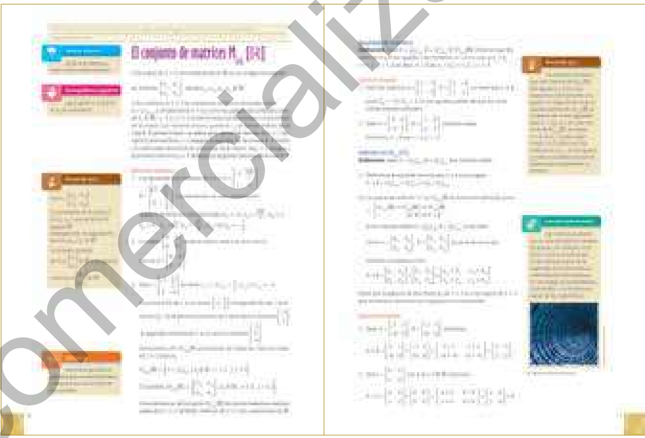

## Contenidos científicos y pedagógicos

Inician con la destreza con criterio de desempeño. Incluyen:

- **Saberes previos.** Pregunta que relaciona el nuevo conocimiento con las experiencias previas del estudiante: su experiencia, su entorno.
- **Desequilibrio cognitivo.** Cuestiona los conocimientos que posee el estudiante y lo desestabiliza para que reconstruya la información que posee.

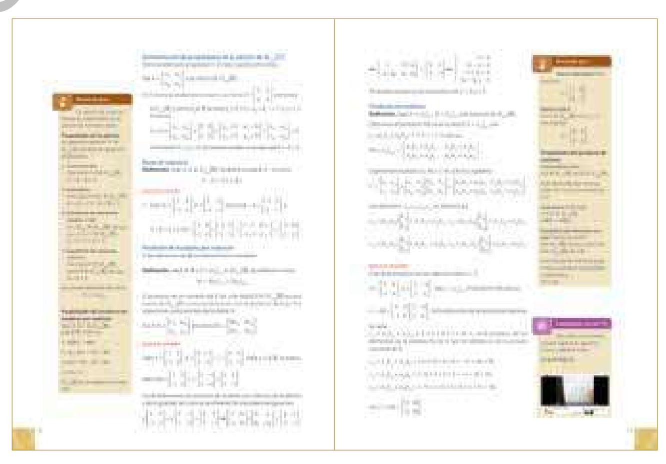
Los contenidos se apoyan en fotos, organizadores gráficos, diagramas, esquemas e ilustraciones.

La estructura de un tema o lección es: 2 páginas de contenidos + 2 páginas para desarrollo de destrezas.



## Secciones variables

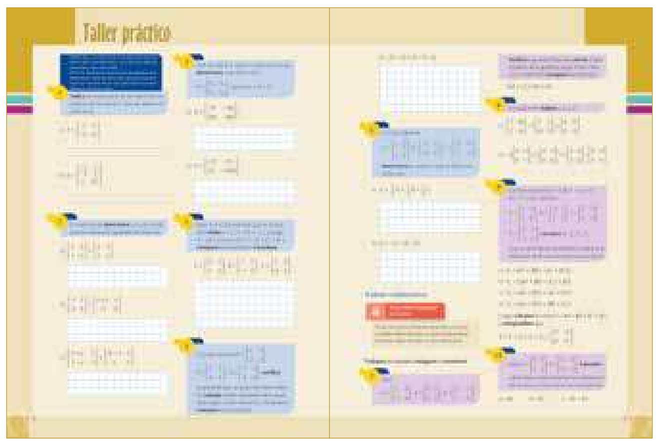
- **Recuerda que…** Se hace mención a temas propios de la matemática; hace referencia a conocimientos anteriores o prerrequisitos que el estudiante necesita para el tema que se está desarrollando.
- **Conexiones con las TIC.** Funciona como herramienta de investigación para que los estudiantes profundicen temas o aprendan de manera más ágil.
- **Interdisciplinariedad.** Vincula la matemática con las demás ciencias matemática y arte, matemática e historia, etc.
- **Eje transversal.** Comprende diferentes temáticas como: interculturalidad, formación de una ciudadanía democrática, protección del medioambiente, cuidado de la salud y los hábitos de recreación de los estudiantes y educación sexual en los jóvenes.
- **Simbología matemática.** Sintetiza los símbolos matemáticos aprendidos en la lección.



## Taller práctico

Dos páginas por tema (en la estructura de 2+2). El taller ha sido diseñado para desarrollar las destrezas del currículo. Incluye actividades en las dimensiones conceptual, procedimental o calculativa y de modelización. Estas invitan a la reflexión, comprensión profunda, dominio de procesos y algoritmos, desarrollo de valores, y aplicación a la realidad.

Cada pregunta inicia detallando la destreza con criterio de desempeño. Siempre existe un **Trabajo colaborativo** acompañado de un recuadro con **Diversidad funcional en el aula,** con recomendaciones para trabajar con estudiantes con discapacidades.



## Solución de problemas cotidianos

Esta sección promueve en los estudiantes la capacidad de resolver problemas, modelándolos con lenguaje matemático, resolviéndolos (utilizando el método adecuado) e interpretando su solución en su marco inicial. Aquí se pondrá un problema tipo, sus algoritmos, los procesos mentales para resolverlo, y algunas recomendaciones.



## Desafíos científicos

Esta sección detalla con información que permite visualizar que los temas tratados en la unidad se relacionan con algo práctico o utilitario, que se aplica en la vida.

## La matemática y las profesiones

Espacio para hablar sobre qué estudios universitarios o tecnologías se pueden estudiar y cómo es la carrera laboral.

## TIC

Guía al estudiante, paso a paso, en la utilización de programas informáticos o en el uso de calculadoras para graficar funciones, vectores, realizar simetrías, homotecias, gráficos de rectas paralelas, perpendiculares, etc.



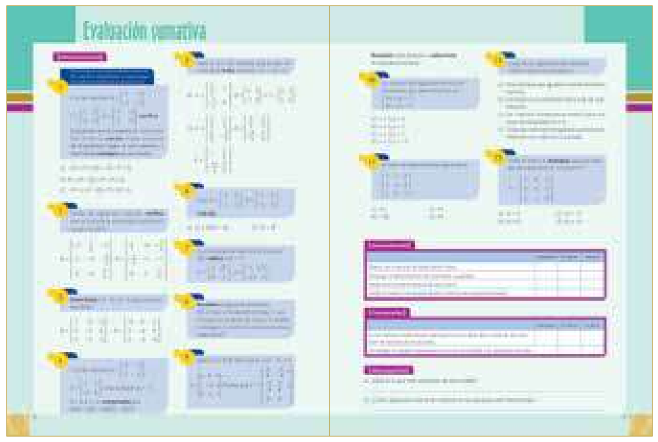

## Desafíos y proyectos matemáticos

Permite reforzar el aprendizaje de la matemática, a través de su aplicación en la práctica.




## Evaluación sumativa

Dos páginas al final de cada unidad con preguntas/actividades en función de los indicadores para la evaluación del criterio. Incluye **Heteroevaluación, Coevaluación, Autoevaluación** y una tabla de **Metacognición**, que orienta al estudiante a reflexionar sobre cómo aprende, y a verificar sus logros y debilidades para retroalimentar su aprendizaje.



# Conoce tu libro

## Apertura de unidad

Contiene: título de unidad, fotografía motivadora relacionada con los temas que se tratarán, texto introductorio, preguntas de comprensión y de lectura de imagen, objetivos de unidad.



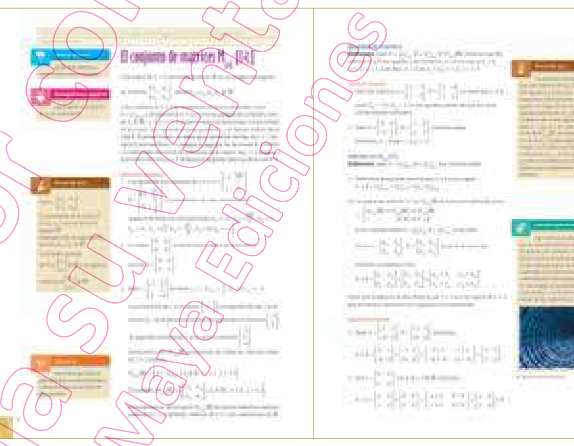

## Contenidos científicos y pedagógicos

Inician con la destreza con criterio de desempeño. Incluyen:

- **Saberes previos.** Pregunta que relaciona el nuevo conocimiento con las experiencias previas del estudiante: su experiencia, su entorno.
- **Desequilibrio cognitivo.** Cuestiona los conocimientos que posee el estudiante y lo desestabiliza para que reconstruya la información que posee.

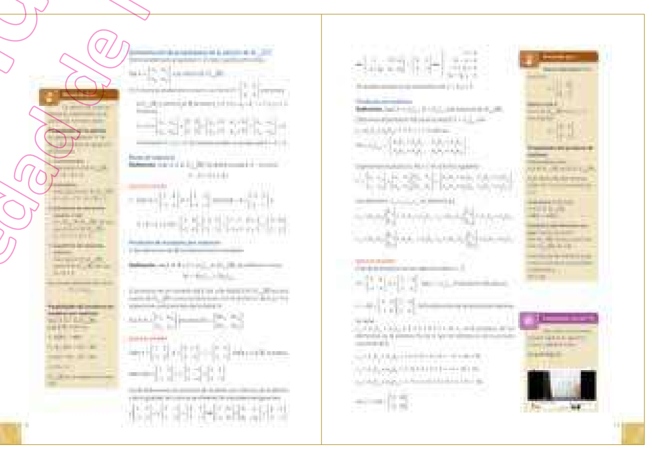
Los contenidos se apoyan en fotos, organizadores gráficos, diagramas, esquemas e ilustraciones.

La estructura de un tema o lección es: 2 páginas de contenidos + 2 páginas para desarrollo de destrezas.



## Secciones variables

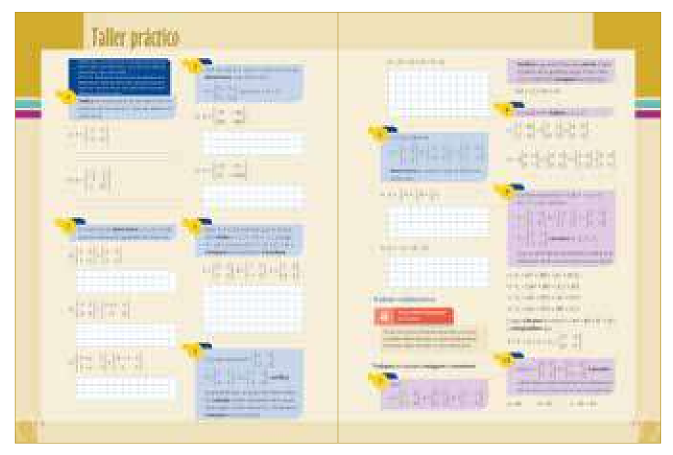
- **Recuerda que...** Se hace mención a temas propios de la matemática; hace referencia a conocimientos anteriores o prerrequisitos que el estudiante necesita para el tema que se está desarrollando.
- **Conexiones con las TIC.** Funciona como herramienta de investigación para que los estudiantes profundicen temas o aprendan de manera más ágil.
- **Interdisciplinariedad.** Vincula la matemática con las demás ciencias matemática y arte, matemática e historia, etc.
- **Eje transversal.** Comprende diferentes temáticas como: interculturalidad, formación de una ciudadanía democrática, protección del medioambiente, cuidado de la salud y los hábitos de recreación de los estudiantes y educación sexual en los jóvenes.
- **Simbología matemática.** Sintetiza los símbolos matemáticos aprendidos en la lección.



## Taller práctico

Dos páginas por tema (en la estructura de 2+2). El taller ha sido diseñado para desarrollar las destrezas del currículo. Incluye actividades en las dimensiones conceptual, procedimental o calculativa y de modelización. Estas invitan a la reflexión, comprensión profunda, dominio de procesos y algoritmos, desarrollo de valores, y aplicación a la realidad.

Cada pregunta inicia detallando la destreza con criterio de desempeño. Siempre existe un **Trabajo colaborativo** acompañado de un recuadro con **Diversidad funcional en el aula,** con recomendaciones para trabajar con estudiantes con discapacidades.



## Solución de problemas cotidianos

Esta sección promueve en los estudiantes la capacidad de resolver problemas, modelándolos con lenguaje matemático, resolviéndolos (utilizando el método adecuado) e interpretando su solución en su marco inicial. Aquí se pondrá un problema tipo, sus algoritmos, los procesos mentales para resolverlo, y algunas recomendaciones.

## Desafíos científicos

Esta sección detalla con información que permite visualizar que los temas tratados en la unidad se relacionan con algo práctico o utilitario, que se aplica en la vida.

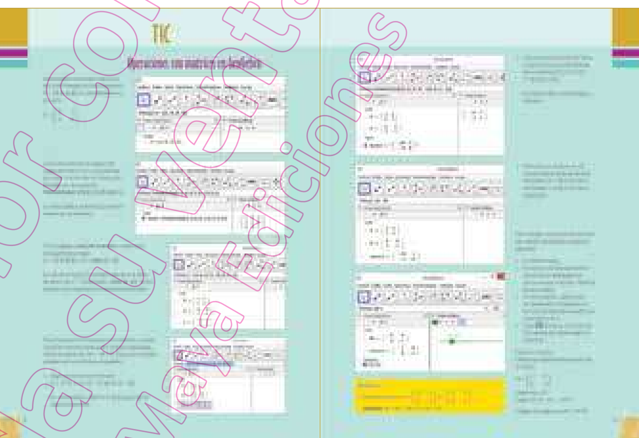
## La matemática y las profesiones

Espacio para hablar sobre qué estudios universitarios o tecnologías se pueden estudiar y cómo es la carrera laboral.



## TIC

Guía al estudiante, paso a paso, en la utilización de programas informáticos o en el uso de calculadoras para graficar funciones, vectores, realizar simetrías, homotecias, gráficos de rectas paralelas, perpendiculares, etc.



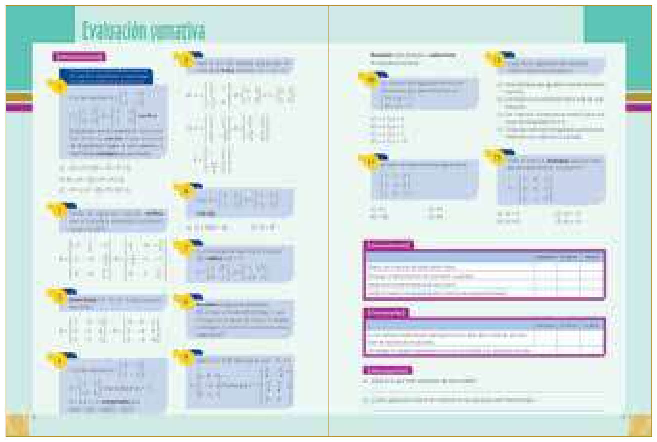

## Desafíos y proyectos matemáticos

Permite reforzar el aprendizaje de la matemática, a través de su aplicación en la práctica.




## Evaluación sumativa

Dos páginas al final de cada unidad con preguntas/actividades en función de los indicadores para la evaluación del criterio. Incluye **Heteroevaluación, Coevaluación, Autoevaluación** y una tabla de **Metacognición**, que orienta al estudiante a reflexionar sobre cómo aprende, y a verificar sus logros y debilidades para retroalimentar su aprendizaje.



# Matrices reales $M_{mxn}[\mathbb{R}]$. Operaciones

## Aplicaciones de matrices en la vida diaria

Nuestra vida diaria está inundada de matrices. Estas actúan como contenedores que nos permiten almacenar datos relacionados entre sí. Por ejemplo, una tabla nutricional nos da la información de energía y proteínas que una porción de alimento fortificante le aporta a nuestro organismo. En medicina, mediante una matriz, se puede ver la utilización de un medicamento y analizar así su comercialización, prescripción y uso en una población determinada. En los Juegos Olímpicos, para determinar el medallero, se utiliza una matriz en la que constan, en columnas, los países participantes y las medallas de oro, plata y bronce que cada uno obtuvo.

Estas son algunas de las aplicaciones de las matrices en el contexto en cual nos desenvolvemos.

Adaptado de: https://es.scribd.com/doc/119256851/Aplicacion-de-Las-Matrices-en-La-Vida-Diaria



## Observa y contesta

- ¿Qué información matemática colocarías en una tabla para describir cada una de las imágenes de esta página?
- ¿Crees que el registro de notas de tu profesor o profesora es un ejemplo de matriz? ¿Por qué?
- ¿Dónde encuentras otros ejemplos de matrices? Enúncialos.



Shutterstock, (2020). 408558961

Shutterstock, (2020). 376923973

# 1 unidad



**Bloques curriculares**
Álgebra y funciones

## Objetivos

- O.G.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- O.G.M.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, tomar decisiones con responsabilidad social y ahorrar esfuerzos y recursos.
- O.G.M.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Ministerio de Educación, (2016).

DCCD: M.5.1.14. Reconocer el conjunto de matrices $M_{2\times 2}$ [ℝ] y sus elementos, así como las matrices especiales: nula e identidad.
M.5.1.15. Realizar las operaciones de adición y producto entre matrices $M_{2\times 2}$ [ℝ], producto de escalares por matrices $M_{2\times 2}$ [ℝ], aplicando las propiedades de números reales.



**Saberes previos**

¿Cuál es la diferencia entre matriz y determinante?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué significa el elemento $a_{ij}$ de una matriz?



**Recuerda que...**

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

La primera fila de la matriz $A$ es $(a_{11}, a_{12})$ que pertenece al espacio $\mathbb{R}^2$.
Análogamente, la segunda fila de $A$ es $(a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^2$.

La primera columna de $A$ es $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y la segunda columna es $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

**Glosario**

identidad. Igualdad algebraica que se verifica siempre, cualquiera que sea el valor de sus variables.

# El conjunto de matrices $M_{2x2}$ [ℝ]

Una matriz de 2 × 2 con coeficientes en ℝ es un arreglo rectangular de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

A las matrices de 2 × 2 las notaremos en forma abreviada como $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ o simplemente $A = (a_{ij})$ si no hay peligro de confusión, donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ se denominan componentes o coeficientes de la matriz. Los números enteros positivos $i$, $j$ se llaman índices de la matriz. El primer índice $i$ se utiliza para identificar las filas. Así, $i = 1$ designa la primera fila e $i = 2$ designa la segunda fila de la matriz. El índice $j$ se utiliza para identificar las columnas de la matriz. Así, $j = 1$ designa a la primera columna y $j = 2$ designa a la segunda columna de la matriz $A$.

*Ejercicios resueltos*

1. Las siguientes son matrices de 2 × 2: $A = \begin{bmatrix} -3 & \frac{500}{7} \\ 1 & \pi \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{5}}{8} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Los elementos de estas matrices son respectivamente los números reales $a_{11} = -3$, $a_{12} = \frac{500}{7}$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = \pi$; $b_{11} = \sqrt{2}$, $b_{12} = \frac{\sqrt{5}}{8}$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = -\frac{1}{3}$.

2. La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se llama matriz nula y se nota con 0, esto es, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Sea $C = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$. Se tiene $c_{11} = -2$, $c_{12} = \frac{1}{2}$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = -4$.

La primera fila de $C$ es el vector $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$; la segunda fila de $C$ es el vector $(5, -4)$; la primera columna de $C$ es el vector columna $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$; la segunda columna de $C$ es el vector columna $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -4 \end{bmatrix}$.

Denotamos con $M_{2\times 2}$[ℝ] al conjunto de todas las matrices reales de 2 × 2; esto es,

$$M_{2\times 2}[\mathbb{R}] = \left\{ A = (a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \right\}.$$

O también, $M_{2\times 2}[\mathbb{R}] = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \quad j = 1, 2 \right\}$.

A los elementos del conjunto $M_{2\times 2}$[ℝ] los denominaremos matrices reales de 2 × 2, o también, matrices de 2 × 2 con coeficientes en ℝ.

## Igualdad de matrices

**Definición.** Sean $A = (a_{ij})_{2\times2}$, $B = (b_{ij})_{2\times2} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$. Diremos que las matrices $A$ y $B$ son iguales, y escribiremos $A = B$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$ $i = 1, 2,\ \ j = 1, 2$; es decir, $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2,\ \ j = 1, 2$.

*Ejercicio resuelto*

1. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, se tiene que $A \neq B$,

   pues $a_{22} = -2$ y $b_{22} = 2$ no son iguales a pesar de que los otros componentes coinciden.

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 3 \end{bmatrix}$ matrices reales.

   Entonces, $A = B \Leftrightarrow x = 4, y = -2$.

## Adición en $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$

**Definición.** Sean $A = (a_{ij})_{2\times2}$, $B = (b_{ij})_{2\times2}$ dos matrices reales.

i) Definimos la suma de las matrices $A$ y $B$ como sigue:
$A + B = (a_{ij})_{2\times2} + (b_{ij})_{2\times2} = (a_{ij} + b_{ij})_{2\times2}$.

ii) La operación adición "+" en $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ es la función definida como

$$+: \begin{cases} M_{2\times2}[\mathbb{R}] \times M_{2\times2}[\mathbb{R}] \rightarrow M_{2\times2}[\mathbb{R}] \\ \qquad (A, B) \rightarrow A + B \end{cases}.$$

Si las matrices reales $A = (a_{ij})_{2\times2}$, $B = (b_{ij})_{2\times2}$ se escriben

como $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, la suma de estas dos

matrices se expresa como

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}.$$

Nota que la adición de dos matrices de $2 \times 2$ es una matriz de $2 \times 2$ que se obtiene sumando sus respectivos componentes.

*Ejercicios resueltos*

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$, entonces,

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 1 & 5 + 4 \\ -8 + 10 & 12 + 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 27 \end{bmatrix}.$$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 & b + 0 \\ c + 0 & d + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

**Recuerda que...**

La definición establece que dos matrices de $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ son iguales si y solo si sus respectivos componentes son iguales. La negación de la igualdad de matrices en $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ se establece del modo siguiente: sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ dos matrices de $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, entonces, $A \neq B \Leftrightarrow a_{ij} \neq b_{ij}$ para algún índice $i$ y $j$. Es decir que dos matrices de $M_{2\times2}$ no son iguales si y solo si al menos uno de los respectivos componentes es distinto.

**Interdisciplinariedad**

Las matrices se presentan en una variedad de campos. Se aplican, por ejemplo, en la física, la química, la biología, en las distintas ramas de la ingeniería, en la economía, la administración de empresas, en sociología, en los problemas ambientales, y en las distintas ramas de las matemáticas.



Shutterstock, (2020). 594116819

▲ Túnel de números binarios.

## Demostración de propiedades de la adición de $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$

Demostraremos la propiedad iii. El resto queda como tarea.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ una matriz de $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$.

iii) Existencia de elemento neutro. La matriz $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pertenece a $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ y como $a_{ij} \in \mathbb{R}$, se tiene $a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, j = 1, 2.$ Entonces,

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

Conclusión: $A + 0 = A$. De manera similar, se prueba que $0 + A = A$.

## Resta de matrices

**Definición.** Sean $A, B \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$. Se define la matriz $A - B$ como

$$A - B = A + (-B).$$

*Ejercicio resuelto*

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces, $-B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, y

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 & 8+2 \\ -1+3 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

## Producto de escalares por matrices

A los elementos de $\mathbb{R}$ los denominamos escalares.

**Definición.** Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A = (a_{ij})_{2\times2} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$. Se define $\lambda A$ como:

$$\lambda A = \lambda(a_{ij})_{2\times2} = (\lambda a_{ij})_{2\times2}$$

El producto de un número real $\lambda$ por una matriz $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ es otra matriz de $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ cuyos componentes son el producto de $\lambda$ por los respectivos componentes de la matriz $A$.

Así, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$.

*Ejercicio resuelto*

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Halla $x, y \in \mathbb{R}$, si existen, tales que $x\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

De las definiciones de producto de escalares por matrices, de la adición y de la igualdad de matrices se obtienen las equivalencias siguientes:

$$x\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y \\ 3y & -5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Recuerda que...**

La adición de matrices hereda las propiedades de la adición de números reales.

**Propiedades de la adición**

La operación adición "+" en $M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ satisface las siguientes propiedades:

i) **Conmutativa.** Para todo $A, B \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, $A + B = B + A$.

ii) **Asociativa.** Para todo $A, B, C \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

iii) **Existencia de elemento neutro.** Existe $0 = (0)_{2\times2} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, tal que para todo $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, $A + 0 = 0 + A = A$.

iv) **Existencia de opuestos aditivos.** Para cada $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, existe $B \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, tal que $A + B = 0$.

Esta matriz está definida como $B = (-a_{ij})_{2\times2}$

**Propiedades del producto de escalares por matrices**

Sean $A, B, C \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

i) $\alpha(\beta A) = \alpha\beta A$.

ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

iv) $1A = A$.

$M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ es un espacio vectorial real.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & 2x-y \\ -x+3y & 3x-5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ 2x - y = 4, \\ -x + 3y = 3, \\ 3x - 5y = -1. \end{cases}$$

Al resolver el sistema las soluciones son $x = 3$, $y = 2$.

## Producto de matrices

**Definición.** Sean $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ dos matrices de $M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$.

Definimos el producto $AB$ como la matriz $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ con

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, esto es,

$$AB = (c_{ij})_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Expresemos el producto $AB = C$ en la forma siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Los elementos $c_{11}$, $c_{12}$, $c_{21}$, $c_{22}$ se obtienen así:

$$c_{11} = (a_{11}, a_{12})\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21},\ c_{12} = (a_{11}, a_{12})\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22},$$

$$c_{21} = (a_{21}, a_{22})\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21},\ c_{22} = (a_{21}, a_{22})\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

*Ejercicio resuelto*

Calcula el producto de las matrices reales $2 \times 2$.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. Sea $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ el producto $AB$, esto es,

$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. De la definición del producto de matrices, se tiene:

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 3 \times 5 + 8 \times 2 = 31$; $c_{11}$ es el producto de los elementos de la primera fila de $A$ por los elementos de la primera columna de $B$.

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 3 \times (-4) + 8 \times 6 = -12 + 48 = 36.$

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-1) \times 5 + 9 \times 2 = -5 + 18 = 13.$

$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-1) \times (-4) + 9 \times 6 = 4 + 54 = 58.$

Así, $C = AB = \begin{bmatrix} 31 & 36 \\ 13 & 58 \end{bmatrix}$.



### Recuerda que...

**Matriz identidad** I está dada por

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Matriz nula 0**

Sea $A \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$ con $a_{ij} = 0$, esto implica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Propiedades del producto de matrices**

**Clausurativa.** Sean $A, B \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}] \Rightarrow AB \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$.

El producto de dos matrices reales de 2×2 es otra matriz de 2×2.

**Asociativa.** Para todo $A, B, C \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$ $(AB)C = A(BC)$.

**Existencia del elemento unidad.** Existe una matriz $I \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$, tal que para toda $A \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$, $AI = IA$.

El producto de matrices, en general, no satisface la propiedad conmutativa.

$AB \neq BA$

### @ Conexiones con las TIC

Para reforzar este tema, puedes ingresar al siguiente enlace y **mirar** el video:

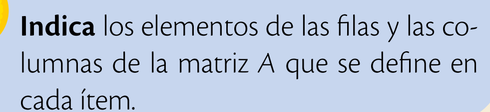
*bit.ly/2V5QC37*



# Taller práctico

DCCD: M.5.1.14. Reconocer el conjunto de matrices M2×2 [ℝ] y sus elementos, así como las matrices especiales: nula e identidad.
M.5.1.15. Realizar las operaciones de adición y producto entre matrices M2×2 [ℝ], producto de escalares por matrices M2×2 [ℝ], aplicando las propiedades de números reales.

**1** **Indica** los elementos de las filas y las columnas de la matriz $A$ que se define en cada ítem.



a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

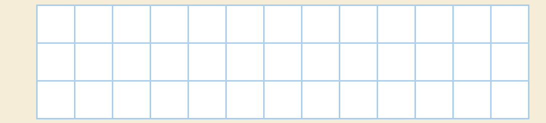
b) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$.

**2** En cada literal, **determina** $x$ e $y$, de modo que se verifique la igualdad de matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$.

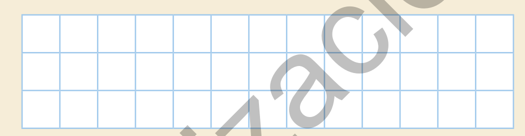
c) $\begin{bmatrix} 4+y & 3 \\ 2-y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+5 & 3 \\ y & 1 \end{bmatrix}$.



**3** Con la matriz $A$ que en cada caso se da, **determina** una matriz real.

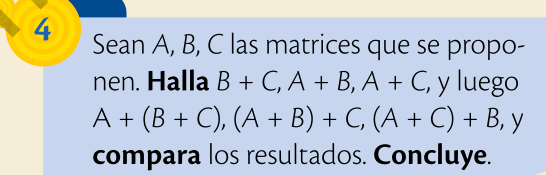
$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ tal que $A + B = 0$.

a) $A = \begin{bmatrix} 10 & -150 \\ 200 & -300 \end{bmatrix}$.

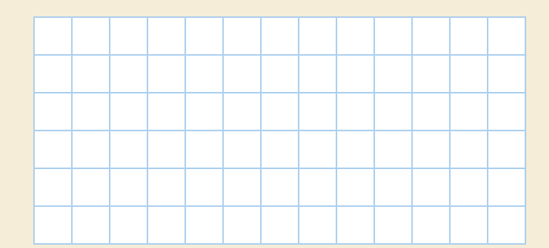


b) $A = \begin{bmatrix} -12 & -15 \\ 25 & -1\,000 \end{bmatrix}$.

**4** Sean $A$, $B$, $C$ las matrices que se proponen. **Halla** $B + C$, $A + B$, $A + C$, y luego $A + (B + C)$, $(A + B) + C$, $(A + C) + B$, y **compara** los resultados. **Concluye**.



$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

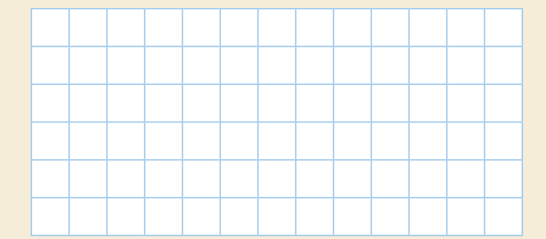


**5** Con las matrices $N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$,

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, **verifica**

la igualdad que se propone. Para el efecto, **calcula** el lado izquierdo de la igualdad, luego, el lado derecho, y finalmente **compara** los resultados.

$N - (P + Q) = N - P - Q.$

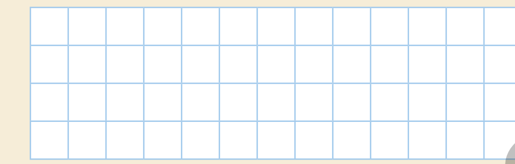


**6** Con las matrices

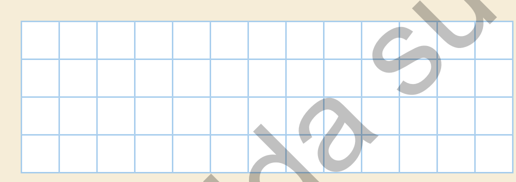
$$A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

**determina** la matriz $X$ que se define en cada caso.

a) $X = \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}C.$



b) $X = -A + 5B - 2C.$



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Todos los niños y jóvenes aprenden a ritmos y niveles diferentes por lo tanto la diversidad funcional debe atender a estas diferencias.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Verifica** la igualdad. Para ello, **calcula** el lado izquierdo de la igualdad, luego, el lado derecho, y finalmente **compara** los resultados.

$A(B + C) = AB + AC.$

**8** En cada ítem, **hallen** $a, b, c, d$.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5a \\ 2 & 3c \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} b & 2 \\ 2d & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

b) $-3\begin{bmatrix} a & -2 \\ b & c \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} a & -2 \\ b & 4c \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & d \\ 2 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$

**9** Con los escalares $\alpha = 4$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $\lambda = -2$ y las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix},$$

$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, **calculen** $X_1, X_2, X_3, X_4$

(que a continuación se definen), mediante la realización de las asociaciones que se indican:

a) $X_1 = \alpha A + [\beta B + (\gamma C + \lambda D)],$

b) $X_2 = [(\alpha A + \beta B) + \gamma C] + \lambda D,$

c) $X_3 = (\alpha A + \beta D) + (\gamma C + \lambda D),$

d) $X_4 = (\alpha A + \lambda D) + (\beta B + \gamma C).$

Luego, **calculen** la matriz $X = \alpha A + \beta B + \lambda C + \gamma D$, y **comprueben** que

$$X = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = \begin{bmatrix} 11 & -11 \\ 20 & 27 \end{bmatrix}.$$

**10** Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$. **Calculen** y describan cómo obtienen los elementos del producto matricial en forma práctica.

a) $AB.$ b) $BA.$ c) $AB - BA.$

DCCD: M.5.1.15. Realizar las operaciones de potencias de matrices M2×2 [R], aplicando las propiedades de números reales.
M.5.1.16. Calcular el producto de una matriz de M2×2 [R] por un vector en el plano, y analizar su resultado (vector y no matriz).

# Matrices especiales

## Matriz invertible e inversa

**Definición.** Sea $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$.

i) Se dice que la matriz $A$ es invertible si y solo si existe una matriz $B \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ tal que $AB = BA = I$.

ii) Se dice que $A$ es singular si y solo si $A$ no es invertible, y que $A$ es no singular si y solo si $A$ es invertible.
Si A es invertible su inversa se nota $A^{-1}$, es decir que, $B = A^{-1}$. Luego, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
A la matriz $A^{-1}$ se le llama matriz inversa de $A$.

*Ejercicio resuelto*

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Si $AB = BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$.

$AB = \begin{bmatrix} 1+0 & -3+3 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

## Potencia de matrices

**Definición.** Sea $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$.

i) Se define $A^m$ recursivamente como sigue: $A^0 = I$, $A^{m+1} = A^mA$, $m = 0, 1, \dots$ .

ii) Si $A$ es invertible, se define $A^{-m} = (A^{-1})^m$, $m = 0, 1, \dots$ .
De la definición:
$A^1 = A^{0+1} = A^0A = IA = A$, $\quad A^2 = A^{1+1} = A^1A = AA$,
$A^3 = A^{2+1} = A^2A = AAA$, $\quad A^4 = A^{3+1} = A^3A = AAAA$,
y así sucesivamente.

Si $A$ es invertible, $A^{-1} = (A^{-1})^1$, $A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1}A^{-1}$,
$A^{-3} = (A^{-1})^3 = A^{-1}A^{-1}A^{-1}$, $\quad A^{-4} = (A^{-1})^4 = A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}$,
y así sucesivamente.

*Ejercicio resuelto*

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, calcula $A^2$.

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$



**Saberes previos**

¿Qué es la matriz identidad?



**Desequilibrio cognitivo**

¿A qué es igual el producto de una matriz por su inversa?



**Recuerda que...**

Sea $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$. Si A es invertible, $A^{-1}$ es única.

Se dice que $A$ es singular si y solo si $A$ no es invertible, y que $A$ es no singular si y solo si $A$ es invertible.

La potencia de matrices cumple con las propiedades de los exponentes.

- Sea $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ con $A \neq 0$. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $A^mA^n = A^{m+n}$. $(A^m)^n = A^{mn}$.
- Si $A \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$ con A invertible, se verifican las propiedades siguientes: para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, $A^mA^n = A^{m+n}$, $(A^m)^n = A^{mn}$.

## Matrices especiales

### Matriz diagonal

**Definición.** Una matriz real $A$ de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ se llama matriz diagonal. Los elementos $a_{11}$, $a_{22}$ se llaman elementos diagonales.
Las matrices diagonales se notan $diag(a_{11}, a_{22})$.

*Ejemplo*
Las siguientes son matrices diagonales: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Escritas con la notación, se tiene $diag(1, 1)$, $diag(0, -5)$.

### Matriz triangular superior

**Definición.** Una matriz real de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ se llama matriz triangular superior. El elemento $a_{21}$ bajo la diagonal es siempre cero.

*Ejemplo*
Las siguientes matrices son triangulares superiores: $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$.

### Matriz triangular inferior

**Definición.** Una matriz real de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ se llama matriz triangular inferior. El elemento $a_{12}$ sobre la diagonal es siempre nulo.

*Ejemplo*
Las siguientes son matrices triangulares inferiores: $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

### Matriz transpuesta

**Definición.** Sea $A = (a_{ij})_{2\times 2} \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$. La transpuesta de $A$, denotada $A^T$, es la matriz $A^T = (b_{ij})_{2\times 2}$ con $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

*Ejercicio resuelto*

1. Sea $A = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ con $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Entonces, $A^T = \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$.

2. Si $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$, entonces, $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$.

**Recuerda que...**

Toda matriz diagonal es una matriz triangular superior e inferior:
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**Conexiones con las TIC**

Para ampliar el conocimiento sobre el tema de matrices, puedes **mirar** el video que se presenta en este enlace:

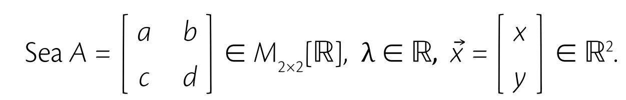
*bit.ly/2V3Zeri*



**Recuerda que...**

**Teorema.**
Sean $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$,
$A, B \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$. Se verifican las siguientes propiedades:

$(A^T)^T = A$,
$(\alpha A + \lambda B)^T = \alpha A^T + \lambda B^T$,
$(AB)^T = B^T A^T$.



# Operaciones elementales con matrices

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. **Intercambio de dos filas de la matriz $\mathbb{R}$.**

   Sea $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz identidad, y sea $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   La matriz $F_1$ es obtenida de I al intercambiar las dos filas de I. Se tiene que $F_1$ es no singular, esto es, $F_1^{-1}$ existe. Entonces

   $$F_1A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

2. **Producto de una fila de la matriz $A$ por una constante $\lambda \in \mathbb{R}$.**

   Se define $F_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Entonces

   $$F_1A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{bmatrix};\ F_2A = \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}.$$

3. **Multiplicación de una fila de una matriz $A$ por una constante $\lambda$ y suma a otra fila.**

   Se define $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$. Entonces, se obtiene el producto de $\lambda$ por la primera fila de $A$ y se suma a la segunda fila de $A$ del modo siguiente:

   $$E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{bmatrix}.$$

   El producto de $\lambda$ por la segunda fila de $A$ y se suma a la primera fila de $A$. Se define $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

   $$\text{Entonces } E_2A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

4. **Producto de la matriz $A$ por el vector $\vec{x}$.**

   Se define $A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$.

*Ejercicio resuelto*

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times3+5\times1 \\ -1\times3+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}$.



**Recuerda que...**

Sea $A = (a_{ij})_{2\times2} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$.

i) Se dice que $A$ es simétrica si y solo si cumple con la propiedad siguiente: $A^T = A$.

ii) Se dice que $A$ es antisimétrica si y solo si se verifica: $A^T = -A$.

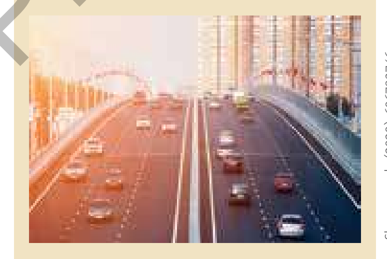


**Interdisciplinariedad**

**Matemática e ingeniería**

La primera aplicación de matrices en ingeniería fue en el año 1934. Duncan y Collar, ingenieros aeronáuticos ingleses, publicaron el artículo "A Method for the Solution of Oscillation Problems by Matrices".

En ingeniería de tránsito se generan matrices de información en la planificación de transporte y aforos vehiculares.



Shutterstock, (2020). 606783746

▲ Tráfico en carretera.

## El conjunto de matrices $M_{m\times n}[\mathbb{R}]$

Una matriz de $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ es un arreglo rectangular de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; \ j = 1, \dots, n.$$

A las matrices de $m \times n$ las notaremos en forma abreviada como $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Esta expresión indica que se trata de una matriz de orden $m \times n$, llamada $A$; sus elementos se llaman $a_{ij}$.

*Ejemplo*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 4}, \ B = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

$A$ es una matriz de 2 filas 4 columnas y $B$ es una matriz de 2 filas y 3 columnas.

## Operaciones con matrices $M_{m\times n}[\mathbb{R}]$

### Suma de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden $m \times n$, la suma se define como: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$.

*Ejercicios resueltos*

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$. Entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}.$$

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & -7 & -2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}$

$A + B$ no está definido, las matrices son de diferente orden.

### Producto de matrices

Dadas dos matrices $A \in M_{m\times p}[\mathbb{R}]$ y $B \in M_{p\times n}[\mathbb{R}]$ (es decir, el número de filas de $B$ coincide con el número de columnas de $A$). Se llama matriz producto $A{\cdot}B$ a otra matriz $C$, cuyos elementos se obtienen así:

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}; \ i = 1, 2, \dots m, \ j = 1, 2, \dots, n.$$

*Ejercicio resuelto*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}; \ \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 8 \end{bmatrix} \text{ no está definido.}$$



**Recuerda que...**

- Se dice que una matriz es cuadrada si y solo si tiene el mismo número de filas que de columnas. Así, una matriz cuadrada de orden $n$ tiene $n$ filas y $n$ columnas.
- Se llama diagonal principal de una matriz cuadrada a la formada por los elementos $a_{ii}$ (es decir: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$).
- Se llama traza de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir, $Traza(A) = \sum_{k=1}^{p} a_{ii} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{mn}$.
- La adición de matrices y el producto matricial de $M_{n\times n}$ cumplen las mismas propiedades de $M_{2\times 2}$.

**Producto de un escalar por una matriz $M_{m\times n}$**

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y $\alpha$ un número. Se define el producto del escalar $\alpha$ por la matriz $A$ y se denota por $\alpha A$ a una matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada elemento de $A$ por $\alpha$.

$$\alpha A = (\alpha\, a_{ij})_{m\times n}$$

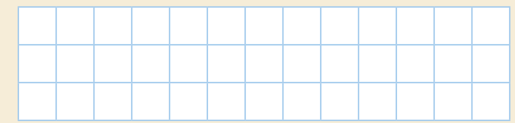
La matriz $\alpha A$ es, por lo tanto, una matriz de la misma dimensión que $A$.

# Taller práctico

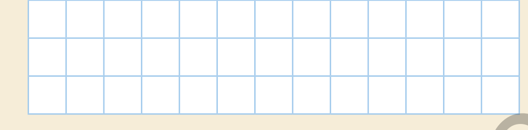
DCCD: M.5.1.15. Realizar las operaciones de potencias de matrices $M_{2\times 2}$ [$\mathbb{R}$], aplicando las propiedades de números reales.
M.5.1.16. Calcular el producto de una matriz de $M2_{2\times 2}$ [$\mathbb{R}$] por un vector en el plano, y analizar su resultado (vector y no matriz).

**1** **Determina** la matriz transpuesta de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

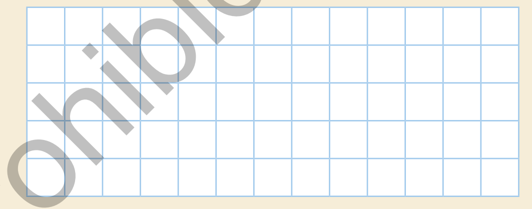


b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

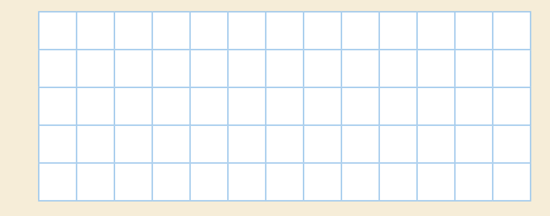


**2** Sean $A$, $B$ matrices simétricas. **Verifica** que $AB$ es simétrica. Para el efecto, **calcula** $AB$ y luego $B^TA^T$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$.



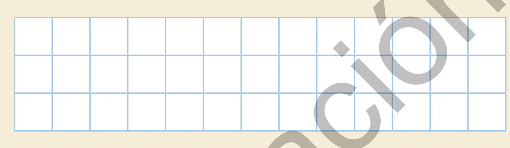
b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.



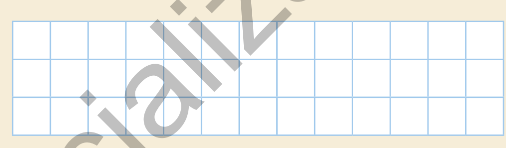
**3** **Considera** las matrices:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. **Calcula**.

a) $Y = A - B^T$.



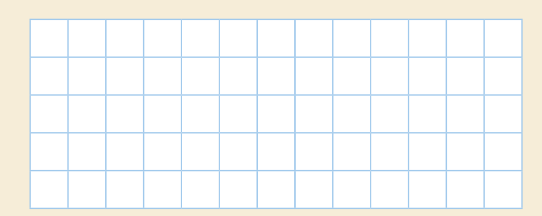
b) $Y = (AB)^T - A^TB$.



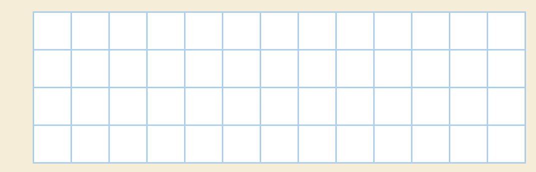
**4** Con los escalares $\alpha$, $\lambda$ y la matriz $A$ que se dan en cada caso, **realiza** las siguientes operaciones:

**Intercambia** las filas de $A$.
**Multiplica** a la primera fila de $A$ por $\alpha$.
**Multiplica** a la segunda fila de $A$ por $\lambda$.
**Multiplica** a la primera fila de $A$ por $\lambda$ y **suma** a la segunda.
**Multiplica** a la segunda fila de $A$ por $\alpha$ y **suma** a la primera fila.

a) $\alpha = -2$, $\lambda = 5$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.



b) $\alpha = 4$, $\lambda = -10$, $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 20 \\ \frac{1}{2} & 40 \end{bmatrix}$.



**5** **Determina** el orden de las matrices, toma la matriz del literal *A* y **determina** con cuál matriz de los otros literales existe, **calcula** el producto.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ ______________________.

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ______________________.

c) $[3 \quad 7 \quad -2]$ ______________________.

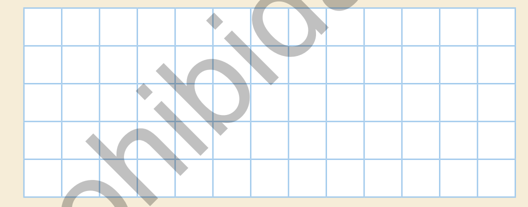
d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 10 \\ -8 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ ______________________.

**6** Sean las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) **Calcula** $A{\cdot}B$.

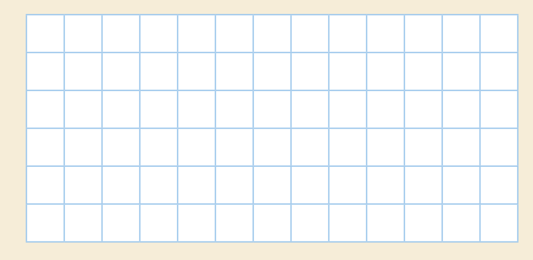


b) Se puede decir que $A{\cdot}B = B{\cdot}A$. ¿Por qué?

______________________

______________________

c) **Calcula** $A(B{\cdot}C)$ y $(A{\cdot}B)C$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando en un aula hay estudiantes con necesidades educativas especiales hay que realizar adaptaciones al currículo, para saber qué, cómo, cuándo y con qué enseñar y evaluar.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** Sean *A*, *B* matrices simétricas. **Verifiquen** que *AB* es simétrica. Para el efecto, **calculen** *AB* y luego $B^TA^T$.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 30 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

**8** **Consideren** las matrices.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. **Calculen**:

a) $Y = (5A^T - 3B^T)(I - AB)$.

b) $Y = A^T + AB^T + (AB)^T$.

c) $Y = A - B^TA - B^TA^T$.

**9** **Consideren** las matrices.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

a) **Determinen** sus órdenes.

b) **Determinen** los siguientes elementos: $a_{12}$; $a_{32}$; $a_{43}$; $a_{34}$; $b_{23}$; $b_{13}$; $b_{12}$; $b_{24}$.

c) **Calculen** $4a_{11} - 5a_{23} + 8a_{42} - 5b_{22}$.

DCCD: M.5.1.18. Calcular determinantes de matrices reales cuadradas de orden 2 y 3 para resolver sistemas de ecuaciones.



**Saberes previos**

¿Qué entiendes por determinante?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué tipo de matrices tienen determinante?

**Glosario**

determinante. Matriz cuadrada, y, por extensión, expresión que se obtiene a partir de sus elementos aplicando ciertas reglas.



**Recuerda que...**

Una notación muy común del determinante de la matriz

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, que se lee "determinante de la matriz A".

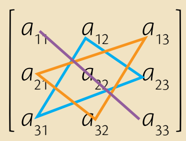
Escribiremos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$

o también,

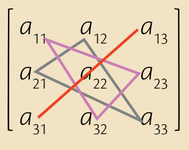
$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Una estrategia para establecer el determinante de orden tres se representa en esta gráfica:

Suman:




Restan:




# Determinantes de órdenes 2 y 3

## Definición de determinante de orden dos

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz de $M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$.

El determinante de $A$ se nota con $\det(A)$ y se define como $\det(A) = ad - bc$.

*Ejercicios resueltos*

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7.$$

2. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Se tiene

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \times 2 - 1 \times 5 = 15.$$

## Definición de determinante de orden tres

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matriz de $M_{3\times 3}[\mathbb{R}]$.

El determinante de $A$ se nota con $\det(A)$ y se calcula con la siguiente fórmula:

$$\det(A) = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Cuyo resultado es:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

*Ejercicios resueltos*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1(-2)5 + 3(-1)(-3) + 4{\cdot}1{\cdot}4 - [4(-2)(-3) + 1(-1)1 + 3{\cdot}4{\cdot}5]$

$= -10 + 9 + 16 - [24 - 1 + 60] = 15 - 83 = -68.$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -7 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2{\cdot}1(-3) + 0{\cdot}2{\cdot}4 + 5(-7)4 - 5{\cdot}1{\cdot}4 - 2{\cdot}2{\cdot}4 - 0(-7)(-3)$

$= -6 + 0 - 140 - 20 - 16 - 0 = -182.$

### Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante determinantes

Consideramos el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$,

con $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Supongamos que $A$ es invertible, lo que es equivalente a decir que $\det(A) \neq 0$, esto es,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Se prueba que las soluciones $x$ e $y$ se calculan como:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

En el determinante del numerador de $x$ reemplazamos las componentes del vector

$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, por los elementos

de la primera columna del determinante.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

En el determinante del numerador de $y$ reemplazamos las componentes del vector

$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, por los elementos

de la segunda columna del determinante.

Este método se conoce también como método de Cramer. Un proceso similar se sigue cuando los determinantes son de orden 3, 4, … $n$.

*Ejercicio resuelto*

1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$, mediante el método de Cramer.

   La matriz del sistema de ecuaciones lineales es $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y su determinante es $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$. Como el determinante es diferente de cero, sí se puede aplicar el método de Cramer.

   $$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-9-1}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3-18}{-5} = 3.$$

   La solución es $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.



**Recuerda que...**

**Propiedades de los determinantes**

Estas propiedades se extienden a todos los determinantes.

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^T|$.
2. Si una fila (o columna) tiene todos sus elementos nulos, el determinante es cero.
3. Un determinante que tiene dos filas o dos columnas iguales da como resultado cero.
4. Si en un determinante los elementos de una fila o columna son múltiplos de los de otra, el valor del determinante es cero.
5. Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no varía.
6. Si se cambian entre sí dos filas, el valor del determinante cambia de signo (análogamente con las columnas).
7. Multiplicando a todos los elementos de una fila (o columna) por $\alpha$, el determinante queda multiplicado por $\alpha$.
8. Sean $A$, $B$ matrices cuadradas, entonces el $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

# Taller práctico

DCCD: M.5.1.18. Calcular determinantes de matrices reales cuadradas de orden 2 y 3 para resolver sistemas de ecuaciones.



1 **Calcula** los determinantes que se indican.

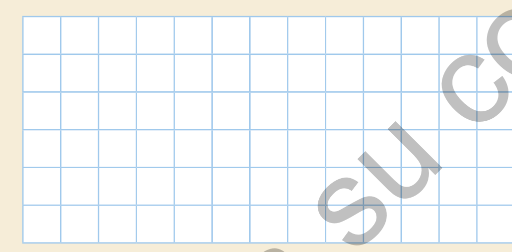
a) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$. ______

b) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$. ______

c) $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. ______

2 Sean $A, B, C \in M_{2\times 2}[\mathbb{R}]$. **Escribe** tres matrices cuadradas y **verifica** que

$\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) = \det(AB)\det(C)$.





3 **Halla** el determinante de la matriz dada.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

4 **Escribe** verdadero (V) o falso (F) en cada enunciado de las propiedades de los determinantes.

a) Si toda entrada en una fila (o columna) es cero, entonces $|A| = 0$. ______

b) Si una matriz $B$ se forma intercambiando dos filas (o columnas) de $A$, entonces $|B| = -|A|$. ______

c) Si dos filas (o columnas) de una matriz $A$ son iguales, entonces $|A| = 0$. ______

5 En los siguientes ejercicios **establece** por qué la igualdad es verdadera sin calcular los determinantes dados.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 9 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

**6** **Completa** la solución del sistema de ecuaciones por el método de Cramer.

$$\begin{cases} -x + 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

$|D| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

$|D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

$|D_y| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

$|D_z| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$ ______.

$x = \frac{|D_x|}{|D|} = -\frac{28}{6} =$ ____,

$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{21}{6} =$ ____,

$z = \frac{|D_z|}{|D|} = -\frac{5}{6} =$ ____.

La solución es $\vec{x} = \begin{bmatrix} __ \\ __ \\ __ \end{bmatrix}$.

- ¿Cómo verificas que las soluciones encontradas son correctas? **Explica**.

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Hay ocasiones en que algunas personas piensan que no van a "avanzar" lo suficiente, o no van a ser atendidos por los profesores si estudian con niños con necesidades educativas especiales, esta forma de pensar se debe cambiar, todos aprendemos de todos.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** En los siguientes ejercicios, **establezcan** por qué la igualdad es verdadera sin calcular los determinantes dados.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

**8** **Prueben** que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab.$

**9** **Resuelvan** el sistema de ecuaciones lineales con el método de determinantes (método de Cramer).

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{6} \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 5y = -58 \\ 4x = -32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

DCCD: M.5.1.19. Calcular la matriz inversa A−1 de una matriz cuadrada A, cuyo determinante sea diferente a 0, por el método de Gauss (matriz ampliada) para resolver sistemas.



**Saberes previos**

¿Una matriz puede escribirse como un determinante?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué condiciones debe cumplir una matriz para que tenga inversa?



**Glosario**

invertible. Que se puede invertir.



**Recuerda que...**

**Propiedades de la matriz inversa**

- Si $B$ y $C$ son inversas de la matriz $A$, entonces $B = C$; por lo tanto, toda matriz tiene una y solamente una matriz inversa.
- Si $A$ y $B$ son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces $A \cdot B$ es invertible. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
- Si $A$ es una matriz invertible, se cumple: $A^{-1}$ es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $A^n$ es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para $n \in \mathbb{N}$.
- Para cualquier escalar $\lambda \neq 0$, la matriz $\lambda \cdot A$ es invertible y $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$.

# Sistemas de ecuaciones lineales

Considera la matriz real de 3 × 3; y los vectores de $\mathbb{R}^3$.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observa los siguientes productos:

$$B\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad B\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}, \quad B\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}.$$

Los resultados muestran que $B\vec{e}_1$, $B\vec{e}_2$, $B\vec{e}_3$ son respectivamente la primera, segunda y tercera columnas de $B$. Estos resultados aplicaremos para el cálculo de la matriz inversa $A^{-1}$ de la matriz invertible $A$.

Considera el sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ siendo $A$ un matriz de 3 × 3 invertible, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ dado, $\vec{x}$ el vector de incógnitas.

Por hipótesis $A$ invertible, existe $A^{-1}$ matriz inversa de $A$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Multiplicando al sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ por $A^{-1}$, se tienen las siguientes equivalencias:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Así, $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Ponemos $B = A^{-1}$. Entonces

$$A^{-1}\vec{e}_1 = B\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \ A^{-1}\vec{e}_2 = B\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}, \ A^{-1}\vec{e}_3 = B\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}.$$

Que muestra que las columnas primera, segunda, tercera de $A^{-1}$ son respectivamente soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales:

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \quad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2, \quad A\vec{x}_3 = \vec{e}_3.$$

Para calcular $A^{-1}$ resolvemos los tres sistemas de ecuaciones lineales con el método de eliminación gaussiana, tratado en el libro 2.

*Ejercicio resuelto*

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular $A^{-1}$. Para ello aplicamos de eliminación gaussiana y calculamos cada una de las columnas de $A^{-1}$.

**Primera columna:**

resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$

Tenemos, $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, $k_2 = -1$, entonces:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}z = -\dfrac{1}{2}; \text{ con } k = 4 \\ -2y = -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}z = -\dfrac{1}{2} \\ 6z = -3. \end{cases}$$

cuya solución es $z = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$. Así $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$.

**Segunda columna:**

resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$

Con los mismos valores, $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, $k_2 = -1$ y $k_4 = 4$, se obtiene

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}z = 1; \\ -2y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}z = 1 \\ -6z = 4, \end{cases}$$

cuya solución es $z = -\dfrac{2}{3}, y = 0, x = \dfrac{1}{3}$. Así $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3} \\ 0 \\ -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$.

**Tercera columna:**

resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1. \end{cases}$

Con los mismos valores, $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, $k_2 = -1$ y $k_4 = 4$, se obtiene

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}z = 0; \\ -2y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2}z = 0 \\ -6z = 1, \end{cases}$$

cuya solución es $z = -\dfrac{1}{6}, y = -\dfrac{1}{2}, x = \dfrac{5}{6}$. Así $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{6} \\ -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$.

La matriz inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$.

**Recuerda que...**

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$\begin{cases} ax + by = b_1, \\ cx + dy = b_2, \end{cases}$

donde $a, b, c, d, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$ son las incógnitas.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}[\mathbb{R}]$,

$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ el vector incógnita.

El producto de la matriz $A$ por el vector $\vec{x}$ se define como el vector de $\mathbb{R}^2$:

$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$.

Luego,

$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = b_1, \\ cx + dy = b_2. \end{cases}$

Esta es la formulación matricial del sistema de ecuaciones lineales.

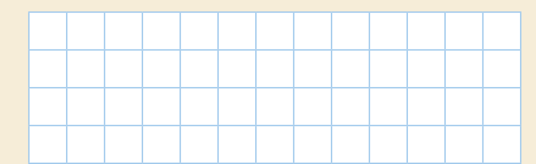
# Taller práctico

DCCD: M.5.1.19. Calcular la matriz inversa $A^{-1}$ de una matriz cuadrada $A$, cuyo determinante sea diferente a 0, por el método de Gauss (matriz ampliada) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

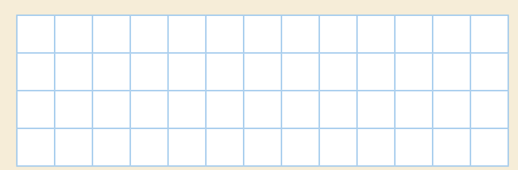


1 **Escribe** en forma matricial cada sistema de ecuaciones lineales que se propone.

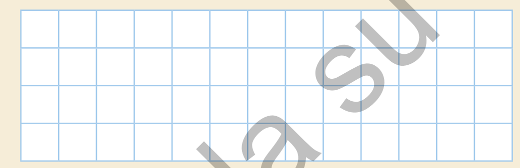
a) $\begin{cases} 10x + 15y = 115 \\ 2x + \phantom{1}3y = 23. \end{cases}$



b) $\begin{cases} 2x - 3y = -11 \\ -\dfrac{2}{3}x + y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$



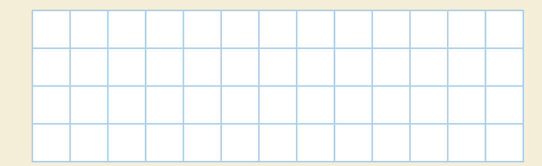
c) $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 1. \end{cases}$



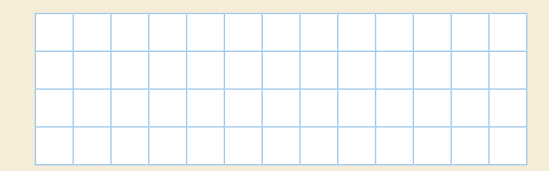


2 En cada literal, **escribe** el sistema de ecuaciones que se propone. **Demuestra** que la matriz $A$ asociada al sistema de ecuaciones no es invertible.

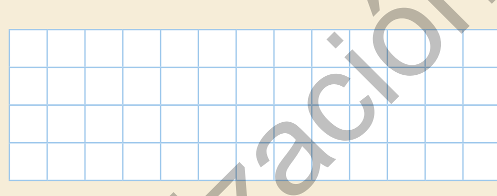
a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$



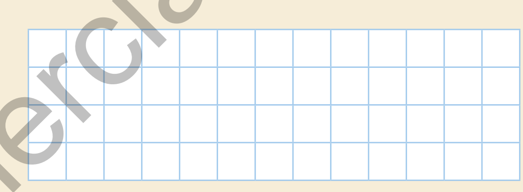
b) $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$



c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$

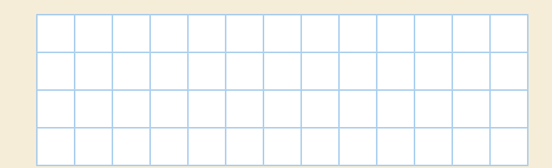


d) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$

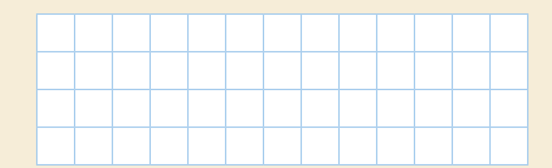


3 **Determina** si cada matriz es invertible. Si es así, **halla** $A^{-1}$.

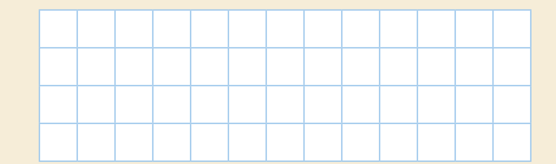
a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$



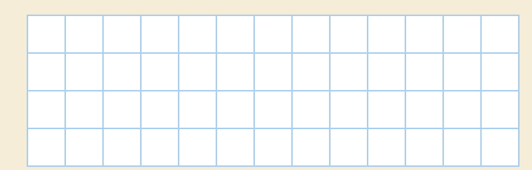
b) $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$



c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$

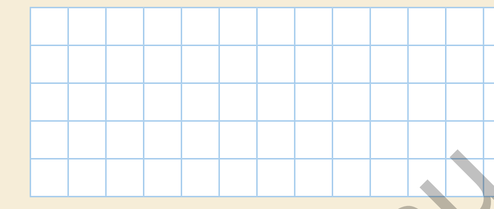


d) $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

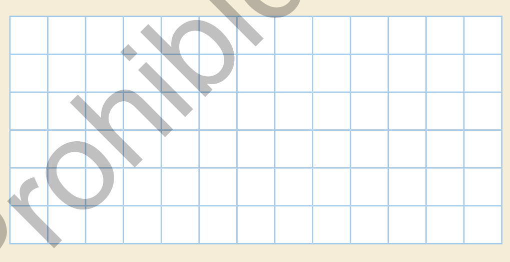


**4** **Resuelve** los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando matriz inversa.

a) $\begin{cases} 2x + y = 13 \\ x + 5y = 29. \end{cases}$



b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ 4x - 6y - 7z = 7. \end{cases}$



**5** **Resuelve** el siguiente problema en tu cuaderno.

El costo del boleto de entrada a un partido de fútbol es \$ 5 para adultos, y \$ 2 para niños. Si se vendieron 11 380 boletos y se recaudaron \$ 51 410, ¿cuántos niños y cuántos adultos pagaron su entrada?

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Al trabajar en equipo con compañeros con alguna discapacidad permite que se miren como son y se sientan aceptados con sus diferencias.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**6** **Determinen** si cada matriz es invertible. Si es así, **hallen** $A^{-1}$.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

**7** **Escriban** en forma matricial cada sistema de ecuaciones lineales. **Determinen** si se puede obtener una solución utilizando matriz inversa. En caso de que sí sea posible, **resuelvan**.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{10}x + \frac{1}{15}y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 2\sqrt{6} \\ x - y = \sqrt{3} - \sqrt{2}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 7. \end{cases}$

# Solución de problemas cotidianos

## Matrices en la economía familiar

En economía, la matriz de Leontief (llamada también tabla de transacciones intersectoriales) permite analizar el sector productivo y el sector de consumidores.


▲ Compras en supermercado.

Shutterstock, (2020). 610773755

1. Dos familias, $F1$ y $F2$, tienen los siguientes consumos de arroz y de carne:

   $F1$: 62 lbs de arroz y 46 lbs de carne.
   $F2$: 93 lbs de arroz y 62 lbs de carne.

   Los precios fueron:
   En 2015, el arroz $ 0,50, y la carne $ 2,50.
   En 2016, el arroz $ 0,55, y la carne $ 2,90.

   ¿Cuál fue el gasto por alimentación de las familias en cada año?

   **Análisis de datos**
   La información del consumo de cada familia se determina en la matriz $A$:

   $$A = \begin{bmatrix} 62 & 46 \\ 93 & 62 \end{bmatrix}.$$

   Las filas representan a las familias, y las columnas representan los productos.
   Una matriz $B$ para los costos en cada año:

   $$B = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}55 \\ 2{,}50 & 2{,}90 \end{bmatrix}.$$

   Las filas son los costos de cada producto, y las columnas son los años.

   **Modeliza**
   La matriz de Leontief manifiesta que para conocer la relación entre consumidor y producción se aplica el producto de matrices.

   $$A \times B = \begin{bmatrix} 62 & 46 \\ 93 & 62 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}55 \\ 2{,}50 & 2{,}90 \end{bmatrix}.$$

   $$A \times B = \begin{bmatrix} 31 + 115 & 34{,}10 + 133{,}4 \\ 46{,}5 + 155 & 51{,}15 + 179{,}8 \end{bmatrix}.$$

   $$A \times B = \begin{bmatrix} 146 & 167{,}5 \\ 201{,}5 & 230{,}95 \end{bmatrix}.$$

   **Interpretación**
   $a_{11}$: La familia 1, en el año 2015, gastó $ 146 por concepto de arroz y carne.
   $a_{22}$: La familia 2, en el año 2016, gastó $ 230,95 por concepto de arroz y carne.

   **Actividad**
   Analiza los resultados obtenidos en $a_{12}$ y $a_{21}$.

**[ Practica en tu cuaderno ]**


▲ Pago en efectivo.

Shutterstock, (2020). 610788476

2. En cierta financiera de la banca de la ciudad de Quito se analizaron los salarios de los empleados con el propósito de revisar el porcentaje de aumento de sueldo. Los datos son: en la agencia centro hay 12 cajeros, 7 personas de administrativo y 3 de servicios varios; en la agencia norte y sur, su distribución respectiva es (10, 6, 4) y (13, 6, 5). El salario que percibe un cajero es de $ 750; el de un administrativo es de $ 1 200; y el de un empleado de servicios varios es $ 415.

   **Analiza** los egresos mensuales por sueldos de cada agencia.
   El gerente general ha considerado un aumento del 10 % para cada sector. **Contesta**: ¿cuál es el egreso que se genera por cada grupo de empleados y por cada agencia?

3. Una fábrica elabora clavos de acero, hierro y madera para tres empresas diferentes. La matriz de producción del primer trimestre es:

   | | $EA$ | $EB$ | $EC$ |
   |---|---|---|---|
   | $CH$ | 380 | 510 | 620 |
   | $CA$ | 430 | 450 | 720 |
   | $CM$ | 510 | 380 | 472 |

   **Resuelve**. Si en el segundo trimestre se duplicó la producción, en el tercero se redujo a la mitad y en el cuarto se mantuvo, ¿cuál fue la producción anual?, ¿cuál fue la producción trimestral?

# La matemática y la Ingeniería en Gestión de Transporte

¿Cuáles son los profesionales que planifican el sistema vial y la movilidad a nivel nacional y local? ¿Cómo se aplica la matemática en el análisis de un sistema vial?

Las ingenierías son las profesiones que con mayor frecuencia utilizan la matemática como herramienta para resolver problemas. La Ingeniería en Gestión de Transporte permite aplicar modelos matemáticos y simulaciones numéricas en forma planificada y organizada, a fin de que la movilidad, el tránsito y los transportes (que a su vez implican uso de suelo, asignación de rutas y frecuencias, semaforización, señalización de vías, dinámica de peatones, control de evacuaciones, entre otros) sean de calidad.

Tomado de: *¿Dónde habitan los problemas matemáticos de la vida real?* Serie de *Matemática Universitaria*, Hernán Benalcázar Gómez, marzo, 2015.


Shutterstock, (2020). 609102245

▲ Ingenieros en transporte.



## La matemática y las profesiones

# Ingeniería en Gestión de Transporte

La Ingeniería en Gestión de Transporte forma profesionales con sólidos conocimientos en ciencia, tecnología, investigación, operacionalidad y funcionalidad del tránsito, transporte y seguridad vial, mediante la aplicación de herramientas científicas y tecnológicas modernas, orientadas a contribuir al desarrollo socioeconómico y al mejoramiento del sistema del transporte.

El ingeniero o la ingeniera en gestión de transporte debe dominar el modelado de las diferentes formas del transporte, para garantizar así una eficiente movilidad que contribuya al desarrollo sustentable.

Los postulantes a la carrera de Ingeniería de Gestión de Transporte deben cumplir con el siguiente perfil:

- Bachiller en Ciencias o Bachillerato General Unificado
- Manejo de herramientas informáticas
- Capacidad para resolver problemas matemáticos y físicos
- Predisposición a la investigación, alto grado de hábitos de estudio

Adaptado de: http://www.espoch.edu.ec/Descargas/Pensum/EIGT_DETALLES_2013_0bee0.pdf

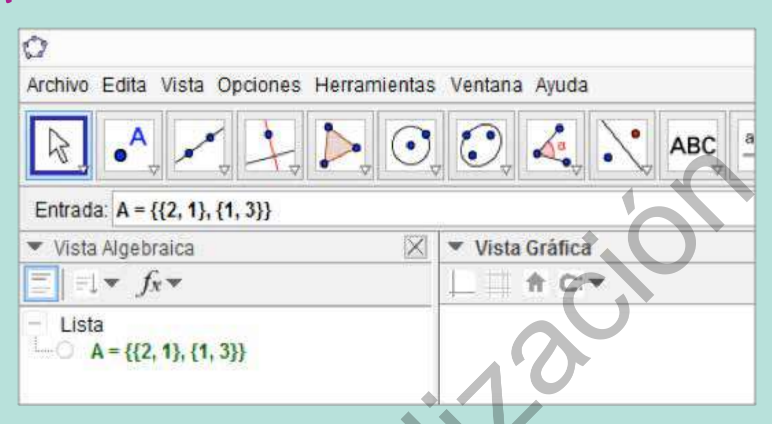

Shutterstock, (2020). 161507681

▲ Gestión de transporte.

# Operaciones con matrices en GeoGebra

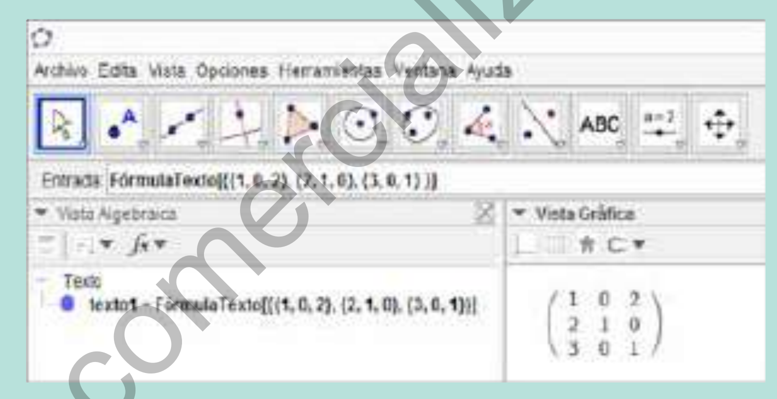
Para expresar una matriz real, en la barra de *Entrada* escribe la expresión $A$ = {{2,1},{1,3}}, la cual representa a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$



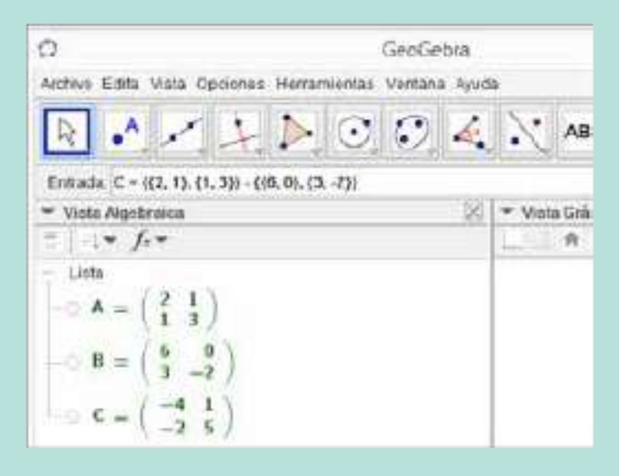

GeoGebra permite el ingreso de cualquier matriz. Así, una cuadrada de orden 3 se escribe en la barra de *Entrada* con la expresión: ***FórmulaTexto***[{{1,0,2},{2,1,0},{3,0,1}}].

En *Vista Gráfica* se aprecia la nomenclatura de las matrices.




Para la **suma** o **resta de matrices**, puedes usar el esquema que sigue:
$A$ = {{2,1},{1,3}} y $B$ = {{6,0},{3,–2}}.

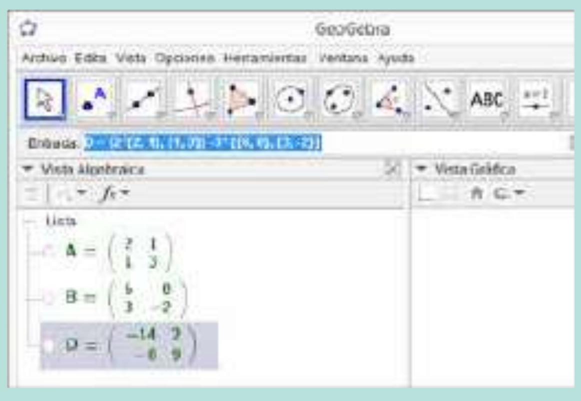
Se calcula la matriz $C$ correspondiente a la resta de estas. Así, $C$ = {{2,1},{1,3}} – {{6,0},{3,–2}}. Todos los datos son ingresados en la barra de *Entrada*.

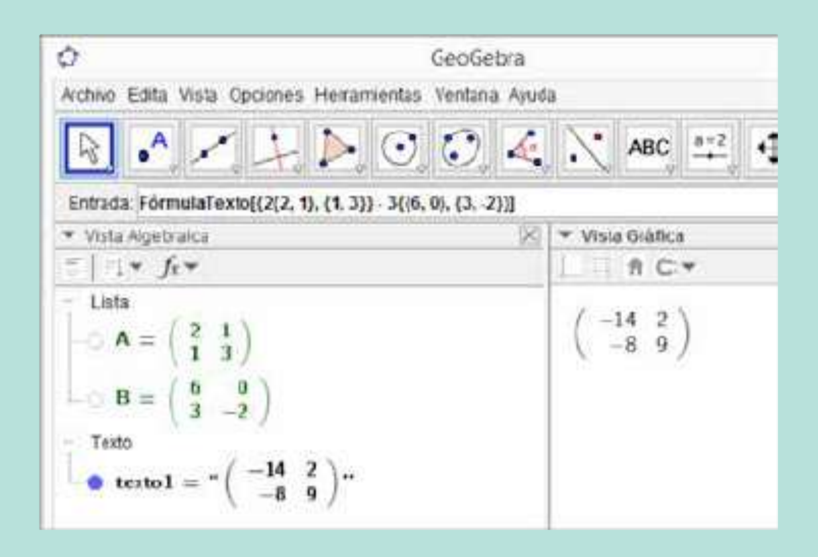



Para el producto de escalares por matrices, considerando las mismas matrices $A$ y $B$ antes ingresadas, realiza la operación $2A - 3B = D$. Para esta actividad, puedes usar uno de estos esquemas:

1. Digita en la barra de *Entrada*:
   $D$ = {2*{2, 1}, {1, 3}} –3* {{6, 0}, {3, –2}}.

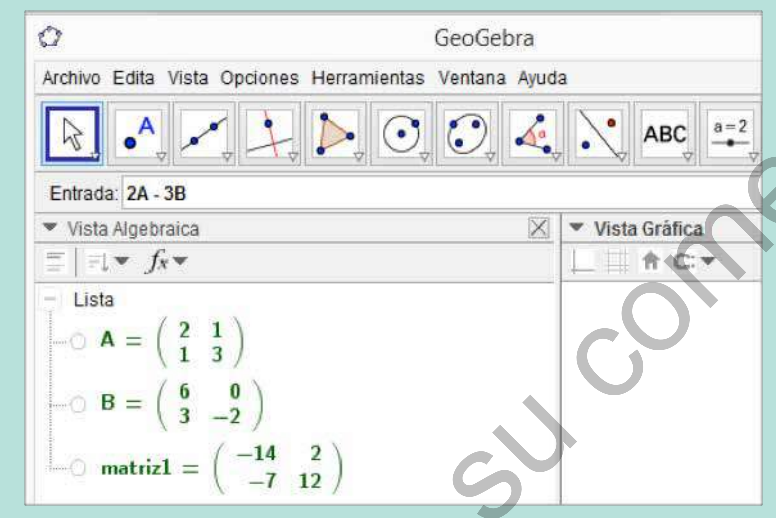
   En *Vista Gráfica*, observa el despliegue de las matrices solución.



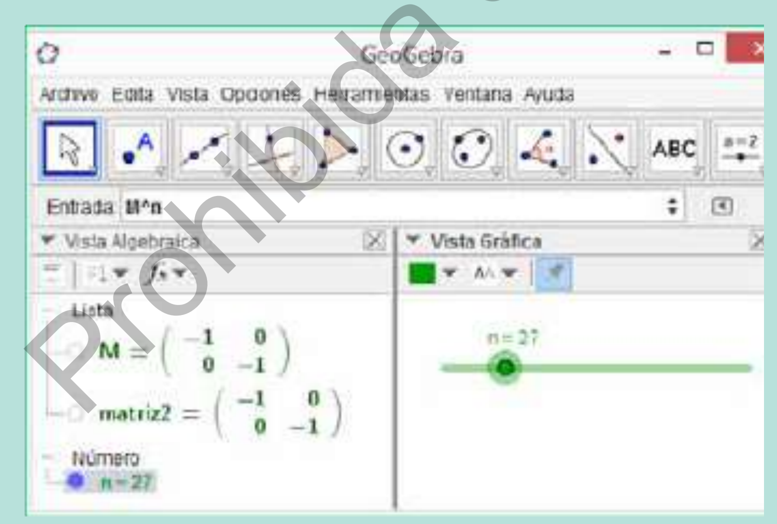



2. Usa el comando Fórmula Texto, y digita en la barra de *Entrada*: *FórmulaTexto* [{2*{2,1},{1,3}} – 3* {{6,0},{3,–2}}].

   En *Vista Gráfica* se despliega la solución.




3. Definidas las matrices *A* y *B*, puedes digitar directamente la expresión 2*A* – 3*B* en la barra de *Entrada* y obtener la matriz resultante.




Para trabajar con potencias de matrices usando deslizadores, realiza lo siguiente:

- Escribe la matriz.
- En la barra de *Entrada* escribe 'potencia', se desplegará un menú, escoge la opción '*Potencia de una Matriz*'.
- A continuación, debes crear un deslizador. Configúralo en función del ejemplo resuelto con incremento de 1.
- Pulsa ▶. Observa cómo la matriz cambia de valores según la potencia.

Ejemplo resuelto:
Utiliza esta herramienta a partir de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determina $M^2$;
luego, $M^3, M^4, M^5, \ldots, M^{128}$.

Indaga una regla para $M^n$, $n \in \mathbb{N}$.

## Practica

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,
  **resuelve**: 3A – 5B, –2B + 7A, A2 – B3.

# Desafíos y proyectos matemáticos

## Tema: Construyendo canastas familiares solidarias

### Recursos

Materiales pertinentes a la empresa que se crea

- Materiales de índole económica: presupuesto del proyecto empresarial
- Materiales tecnológicos: calculadora, *tablet*, celular, computadora con la aplicación GeoGebra
- Internet

### Justificación

El estudio de las matrices es tan antiguo como la existencia del ser humano. Algunos vestigios dan cuenta de cómo este llevaba un seguimiento de lo producido en forma ordenada, en casillas, con una estructura similar al de una matriz. En la actualidad, la matriz es considerada una herramienta muy importante para el álgebra, ya que permite el ordenamiento de datos y su manejo.

### Objetivos

- Utilizar la teoría de matrices para generar una microempresa de canastas familiares solidarias.
- Construir matrices con diferentes tipos de canastas solidarias, con distintos tipos de productos y gramaje.
- Aplicar las operaciones de matrices para conocer los precios de cada canasta familiar.
- Generar una publicidad por medio de una red social para ofertar estos productos.

### Actividades

- Formen equipos de tres estudiantes y elijan a una persona como coordinadora.
- Quien coordine debe organizar los diferentes tipos de canastas que se van a ofertar (las canastas podrían contener frutas, verduras, granos, entre otros).
- En cada equipo, diseñen las matrices de las canastas que deben ser de tres tipos con diferentes pesos.
- Utilizando el *software* GeoGebra, determinen la matriz de los kilos totales que necesitan para sus canastas, y otra matriz de los costos.
- Elaboren las canastas; reúnanse con el resto de equipos y preparen una campaña que se difunda en una red social o en la página del colegio. También pueden colocar afiches en las entradas de la institución o en los locales cercanos.
- Organicen una feria para la venta de sus canastas.
- Elaboren un informe utilizando diapositivas. Dicho informe debe contener: la utilidad de las matrices, la aplicación de las matrices en la construcción de su proyecto, los logros alcanzados en esta actividad, las conclusiones, y otras utilidades de las matrices.



Canasta solidaria, (2020) www.elciudadano.gob.ec

▲ Canasta básica de frutas y verduras.

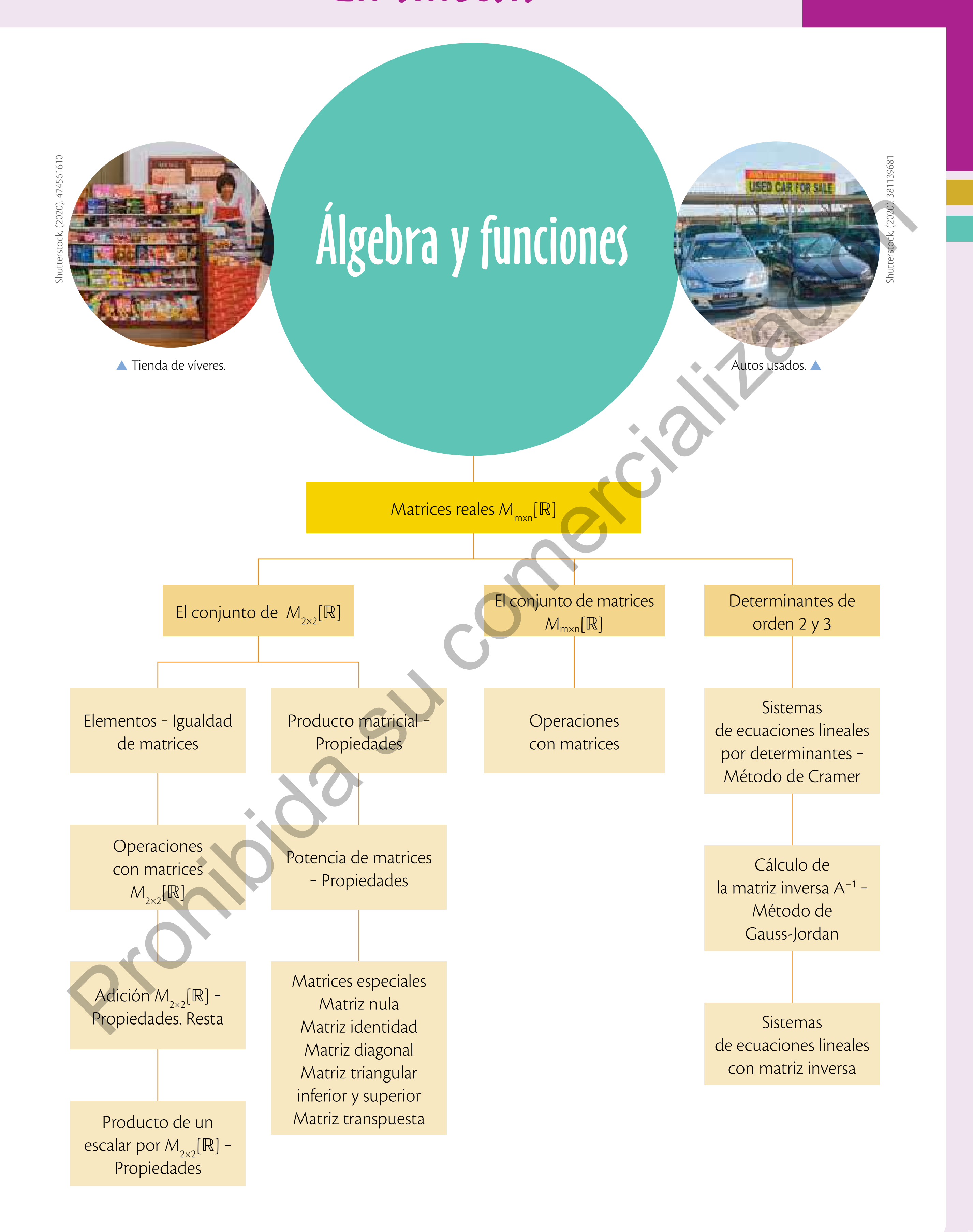
### Conclusiones

Las matrices se utilizan para clasificar valores numéricos atendiendo a criterios o variables.

Las matrices de información recolectan datos numéricos que se desprenden de una situación problema.

Las matrices se aplican en varios campos, en especial en la organización de la economía familiar.

# En síntesis




▲ Tienda de víveres.

Autos usados. ▲

# Evaluación sumativa

**[Heteroevaluación]**

M.5.2.2. Opera con matrices de hasta tercer orden, calcula el determinante, la matriz inversa y las aplica en sistemas de ecuaciones. (I.3.)

**1** Con las matrices $N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, **verifica** la igualdad que se propone en cada caso. Para el efecto, **calcula** el lado izquierdo de la igualdad, luego, el lado derecho, y finalmente **compara** los resultados.

a) $-(N + P + Q) = -N - P - Q$.

b) $N - (P - Q) = N - P + Q$.

c) $-N - (-P - Q) = P + Q - N$.

**2** Dadas las siguientes matrices, **verifica** que se cumple la propiedad conmutativa para la suma.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & \frac{1}{3} & -1 \\ 4 & -2 & -\frac{2}{3} \\ 6 & -3 & \frac{4}{3} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 8 & -9 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & -5 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**3** **Determina** si $A \cdot B = B \cdot A$ para las matrices dadas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

**4** Con las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, y los escalares $\alpha = -3$, $\lambda = 4$, $\gamma = -2$, **comprueba** que $\lambda(\alpha A - \gamma B) = (\alpha\lambda)A - (\lambda\gamma)B$.

**5** Sean $A$, $B$, $C$ las matrices que se dan en cada ítem, **halla**, si existen, $xA + yB = C$.

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$, $C = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ -\frac{19}{5} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$.

**6** Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$.

**Calcula**.

a) $(A + B)(A - B)$.

b) $A^2 - B^2$.

**7** Con los pares de matrices $A$, $B$ que se dan, **indica** si $B = A^{-1}$.

$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$

**8** **Resuelve** el siguiente problema.
Por 8 rosas y 10 claveles se paga \$ 1,44. Si luego se compran 20 rosas y 5 claveles, y se paga \$ 2, ¿cuánto cuesta cada rosa y cada clavel?

**9** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha = ad - bc \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & -d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Prueba que } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\alpha} & -\frac{d}{\alpha} & 0 \\ -\frac{c}{\alpha} & \frac{a}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Resuelve** cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

**10** La solución del siguiente sistema de ecuaciones por determinantes es:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$$

a) $x = 3, y = 4$.
b) $x = 5, y = 1$.
c) $x = 3, y = 1$.
d) $x = 2, y = -1$.

**11** El valor del determinante siguiente es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

a) 63.
b) −36.
c) 42.
d) 24.

**12** ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre matrices es verdadera?

a) Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño.
b) Un sistema inconsistente tiene más de una solución.
c) Las matrices transpuestas existen para matrices rectangulares $m \times n$.
d) Todas las matrices triangulares superiores e inferiores son matrices cuadradas.

**13** Dada la matriz $A$, **averigua** para qué valores del parámetro $m$ no existe $A^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{bmatrix}.$$

a) $m = 3$
b) $m = 0$
c) $m = -1$
d) $m = -3$



**[Autoevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Opero con matrices de hasta tercer orden. | | | |
| Obtengo el determinante de una matriz cuadrada. | | | |
| Determino la matriz inversa de una matriz. | | | |
| Utilizo la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales. | | | |

**[Coevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| En los trabajos colaborativos participamos con ideas que conllevan a la solución de sistemas de ecuaciones. | | | |
| Al trabajar en equipo respetamos los turnos para hablar y las opiniones vertidas. | | | |

**[Metacognición]**

a) ¿Qué es lo que más recuerdas de esta unidad?

b) ¿Cómo aplicarías el tema de matrices en un contexto real? Menciónalo.

# Operaciones con funciones y planos en $\mathbb{R}^3$

## Aplicaciones de vectores en $\mathbb{R}^3$

Los elementos en $\mathbb{R}^3$, más aún los vectores y planos, están presentes en nuestra vida, incluso en diseños que nos parecen insignificantes o comunes como, por ejemplo, en los juegos de computadora o en las películas animadas que han sido desarrolladas con gráficos vectoriales. Estos elementos también han estado presentes en artefactos y contextos de larga data, como en el transporte aéreo o en los desplazamientos de los barcos. El aporte máximo de los vectores se da en física: en el tiro parabólico o en el estudio que se realiza al analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo (por ejemplo, cuando se pretende mover una puerta).

Adaptado de: http://interrogantesconangge.blogspot.com/





### Observa y contesta

- ¿Qué dimensiones puedes observar en cada figura?
- ¿Crees que los objetos que nos rodean son tridimensionales? ¿Por qué?
- ¿En qué situaciones de tu entorno se pueden apreciar planos o rectas en el espacio? Menciónalas.



Shutterstock, (2020). 374226769

# 2

# unidad



**Bloques curriculares**
Álgebra y funciones
Geometría y medida



Shutterstock, (2020). 92728867.

## Objetivos

- O.G.M.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.
- O.G.M.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental y escrito, exacto o estimado; y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio.
- O.G.M.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Ministerio de Educación, (2016).

DCCD: M.5.1.25. Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.



**Saberes previos**

¿Qué es el dominio de una función?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Cuál es la definición de "función nula"?



**Recuerda que...**

$f, g \in F(A) \Rightarrow f+g \in F(A)$, que se conoce como propiedad clausurativa. El grafo de la función $f+g$ es el conjunto

$G(f+g) = \{(x, f(x)+g(x)) \mid x \in A\}$.

**Glosario**

función. Relación entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primero un elemento del segundo o ninguno.

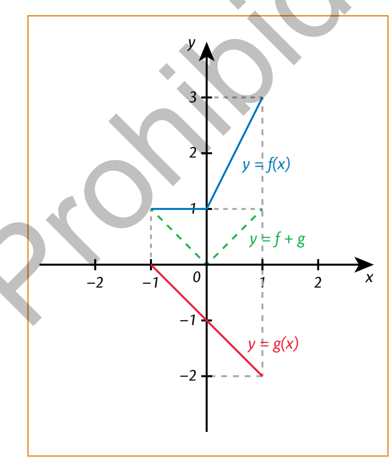



Figura 2.1.

# Operaciones con funciones reales

Sean $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \varnothing$. Denotamos con $F(A)$ el conjunto de todas las funciones reales definidas en $A$. Si $f \in F(A)$, se debe entender que $Dom(f) = A$, para cada $x \in A$, $f(x) \in \mathbb{R}$ y $Rec(f) \subset \mathbb{R}$.

Sean $f, g \in F(A)$. Recuerda que $f$ y $g$ son iguales, $f = g$, si y solo si se verifica $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$. La función $f_0 \in F(A)$, definida como $f_0(x) = 0$, $\forall x \in A$, se denomina función cero o función nula.

## Adición

**Definición.** Sean $f, g \in F(A)$. La suma de $f$ con $g$ se nota $f+g$ y es la función real definida en $A$ como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in A.$$

La operación adición "+" en $F(A)$ es la función que se define como sigue:

$$+ : \begin{cases} F(A) \times F(A) \rightarrow F(A) \\ (f, g) \mapsto f+g. \end{cases}$$

Intervienen los siguientes elementos: $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ y la adición "+" en $\mathbb{R}$, con lo que se tiene $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ que es el valor de la función o imagen de $f+g$ en el punto $x \in A$.

*Ejercicios resueltos*

1. Sean $A = [-1,1]$ y $f, g \in F(A)$ definidos como sigue:
   $f(x) = x + |x| + 1$, $g(x) = -x - 1$, $x \in [-1,1]$. Calculemos algunos valores $f(x)$ para $x \in [-1,1]$:

   $$f(-1) = -1 + |-1| + 1 = 1, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \left|-\frac{1}{2}\right| + 1 = 1,$$

   $$f(0) = 0 + |0| + 1 = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2}\right| + 1 = 2, \quad f(1) = 1 + |1| + 1 = 3.$$

   Sea $x \in [-1,1]$. Si $-1 \leq x \leq 0$, se tiene

   $$f(x) = x + |x| + 1 = x - x + 1 = 1,$$

   y si $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = x + |x| + 1 = x + x + 1 = 2x + 1$.

   Por otro lado, obtenemos algunos valores de $g(x)$, $x \in [-1,1]$:

   $$g(-1) = 0, \quad g(0) = -1, \quad g(1) = -2.$$

   La función $f+g$ está definida en $[-1,1]$ como sigue:

   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + |x| + 1 - x - 1 = |x| = \begin{cases} x, \text{ si } -1 \leq x < 0, \\ -x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   En la Figura 2.1. constan las gráficas de las funciones $f, g$ y $f+g$.

2. Consideremos $A = \mathbb{R}$, $f, g$ las funciones reales definidas como $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $g(x) = x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. La función $f + g$ se define como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calculemos algunos valores de $f(x)$, $g(x)$ y $(f + g)(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

| x | $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ | $g(x) = x - 2$ | $(f + g)(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ |
|---|---|---|---|
| −2 | 1 | −4 | −3 |
| −1 | 1/4 | −3 | −11/4 |
| 0 | 0 | −2 | −2/3 |
| 1 | 1/4 | −1 | −3/4 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |

En la Figura 2.2. se muestran las gráficas de las funciones $f$, $g$ y $f + g$.

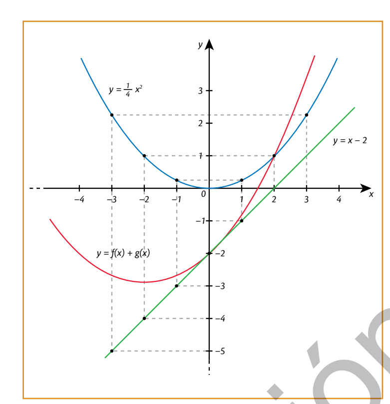



Figura 2.2.

## Demostración propiedades de la adición de funciones

Se demuestra la propiedad conmutativa de la adición de funciones y el resto de propiedades se deja como tarea para el estudiante.

i. Sean $f, g \in F(A)$. Entonces, de la definición de $f + g$, se tiene

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x) \quad \forall x \in A,$$

y por la definición de igualdad de funciones se concluye que $f + g = g + f$.

## Resta

**Definición.** Sean $f, g \in F(A)$. Como $-g \in F(A)$ y $f \in F(A)$, entonces $f + (-g) \in F A$ que se define como:

$$(f + (-g))(x) = f(x) + (-g)(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in A,$$

y que se notará como $f - g$. La resta de funciones reales se define como:

$$f - g = f + (-g).$$

## Producto de funciones

**Definición.** Sean $f, g \in F(A)$. El producto de $f$ por $g$ se nota $fg$ y se define como:

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \forall x \in A.$$

Los argumentos que intervienen en el producto de las funciones $f$ y $g$ son: $Dom(f) = Dom(g) = A$, para cada $x \in A$, $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$. Luego, $f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ es la imagen de la función $fg$ en $x \in A$ que se escribe $(fg)(x)$. Resulta $fg \in F(A)$.

Se tiene la implicación: $f, g \in F(A) \Rightarrow fg \in F(A)$, que se denomina propiedad clausurativa.

### Recuerda que...

Las propiedades de la adición de funciones son:

i. **Conmutativa.** Para todo $f, g \in F(A)$, $f + g = g + f$.

ii. **Asociativa.** Para todo $f, g, h \in F(A)$, $(f + g) + h = f + (g + h)$.

iii. **Existencia de elemento neutro.** Existe $f_o \in F(A)$, tal que para todo $f \in F(A)$, $f + f_o = f_o + f = f$.

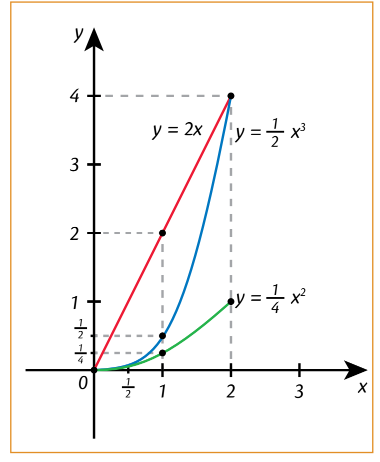
iv. **Existencia de opuestos aditivos.** Para cada $f \in F(A)$, existe $g \in F(A)$, tal que $f + g = f_o$.

Esta función g se denota $-f$, así, $g = -f$.

Para cada $x \in A$, $f(x) \in \mathbb{R}$, luego $-f(x) \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) + (-f(x)) = 0$. Se define la función $-f$ como $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in A$. Se tiene $f + (-f) = f_0$.

### Glosario

argumento. Razonamiento para probar o demostrar una proposición, o para convencer de lo que se afirma o se niega.




▲ Figura 2.3.

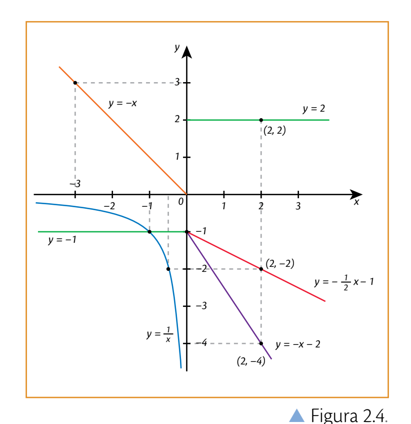
1. Sean $A = [0, 2]$ y $f, g \in F(A)$ las funciones reales definidas como $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x \in [0, 2]$. La función $fg$ está definida como

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = 2x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{2}x^3,\ x \in [0, 2].$$

Calculemos algunas imágenes $(fg)(x)$ $x \in [0, 2]$. Tenemos

| $x$ | $f(x) = 2x$ | $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ | $f(x)g(x) = \frac{1}{2}x^3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1 | 1/16 | 1/16 |
| 1 | 2 | 1/4 | 1/2 |
| 2 | 4 | 1 | 4 |

En la Figura 2.3. se muestran las funciones $f$, $g$ y $fg$.




▲ Figura 2.4.

2. Considera las funciones reales $f$, $g$ definidas en todo $\mathbb{R}$ como siguen:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0, \\ 2, & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0, \\ -\frac{1}{2}x - 1, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Definamos la función $fg$. Si $x < 0$, $f(x) = -x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, entonces

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = -x\left(\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Si $x \geq 0$, $f(x) = 2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$, luego

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = 2\left(-\frac{1}{2}x - 1\right) = -x - 2.$$

$$\text{Así, } (fg)(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq 0, \\ -x-2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En la Figura 2.4. se representan las funciones $f$, $g$ y $fg$. Identifica a cada una de ellas.

### Recuerda que...

El producto de funciones cumple con las propiedades:

i. **Conmutativa.** Para todo $f, g \in F(A)$, $fg = gf$.

ii. **Asociativa.** Para todo $f, g, h \in F(A)$, $f(gh) = (fg)h$.

iii. **Existencia de elemento unidad.** Existe $\mathbf{1}_A \in F(A)$, definida como $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\forall x \in A$, tal que para todo $f \in F(A)$, $\mathbf{1}_A f = f$.

iv. **Distributiva.** Para todo $f, g, h \in F(A)$, $f(g + h) = fg + fh$.

### Demostración

Se demuestra la propiedad conmutativa del producto de funciones. El resto se deja como tarea para el estudiante.

i. Sean $f, g \in F(A)$. Entonces, para cada $x \in A$ se tiene $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ y $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. Luego,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x), \quad \forall x \in A,$$

y por la igualdad de funciones se concluye que $fg = gf$.

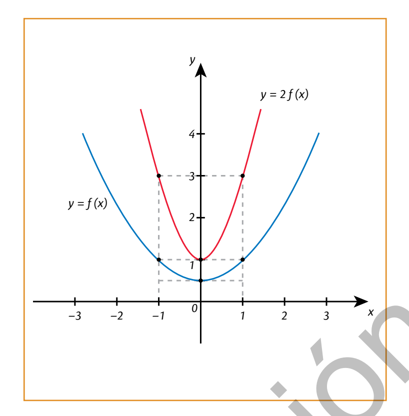
## Producto de números reales por funciones

**Definición.** Sean $\lambda \in \mathbb{R}, f \in F(A)$. El producto de $\lambda$ por $f$ se designa con $\lambda f$ y es la función definida en $A$ como

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in A.$$

Intervienen los siguientes elementos: $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}$ y el producto de números reales "·", de modo que $\lambda \cdot f(x) \in \mathbb{R}$, que se escribe simplemente $\lambda f(x)$. Este elemento $\lambda f(x)$ es la imagen de la función $\lambda f$ en $x \in A$, así, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \in \mathbb{R}$. Se tiene, entonces, la siguiente implicación:

$$\lambda \in \mathbb{R}, f \in F(A) \Rightarrow \lambda f \in F(A).$$



▲ Figura 2.5.


*Ejercicios resueltos*

1. Sea $f$ la función real definida como $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$.
   Entonces, $2f$ es la función definida como sigue:

$$(2f)(x) = 2f(x) = 2\left[x^2 + \frac{1}{2}\right] = 2x^2 + 1, \; x \in \mathbb{R}.$$

   Calculemos algunos valores de las funciones $f$ y $2f$.

| $x$ | $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ | $2f(x) = 2x^2 + 1$ |
|---|---|---|
| −2 | 9/2 | 9 |
| $-1/\sqrt{2}$ | 1 | 2 |
| 0 | 1/2 | 1 |
| 1 | 3/2 | 3 |

   En la Figura 2.5. se representan gráficamente las funciones $f$ y $2f$. Identifica estas funciones.



2. Considera la función real $f$ definida como $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ si } x \leq 0, \\ x + 2, \text{ si } x > 0. \end{cases}$

   Para $\lambda \in \mathbb{R}$, la función real $\lambda f$ está definida como

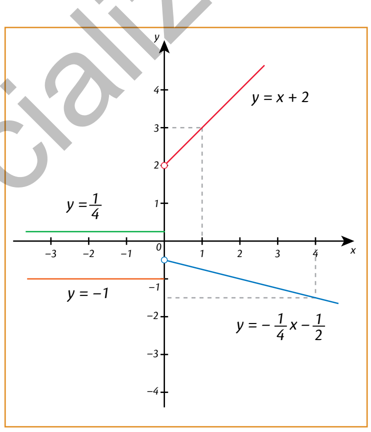
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \begin{cases} -\lambda, \text{ si } x \leq 0, \\ \lambda x + 2\lambda, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

   Particularmente, para $\lambda = -\frac{1}{4}$ tenemos

$$\left(-\frac{1}{4} f\right)(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ si } x \leq 0, \\ -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

   Para $x = -1, \left(-\frac{1}{4} f\right)(-1) = \frac{1}{4}$, para $x = 2, \left(-\frac{1}{4} f\right)(2) = -1$, mientras que $f(1) = -1, f(2) = 4$.

En la Figura 2.6. se muestran las gráficas de $f$ y de $-\frac{1}{4} f$.



▲ Figura 2.6.

**Recuerda que...**

Las propiedades del producto de escalares por funciones son las cuatro que se detallan a continuación.
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in F A$.

Se verifican las siguientes propiedades:

i. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$.
ii. $\alpha(f + g) = \alpha f + \beta g$.
iii. $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$.
iv. $1 \cdot f = f$.

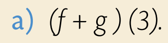
La demostración se deja como investigación para el estudiante.

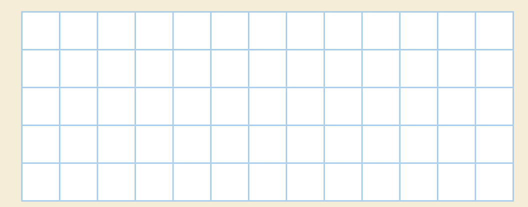
# Taller práctico

DCCD: M.5.1.25. Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.

**1** **Considera** las funciones reales $f$, $g$, $h$ definidas en el intervalo $(0, \infty)$ como $f(x) = -x+1$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$, $h(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. **Calcula.**

a) $(f + g)(3)$.

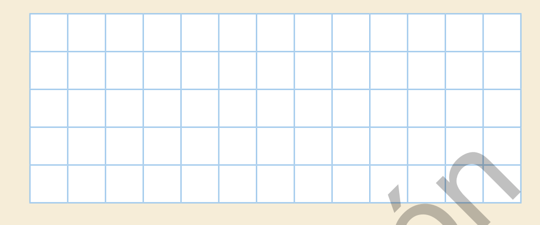




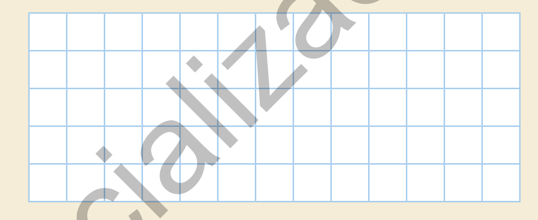
b) $(f + g + h)(15)$.



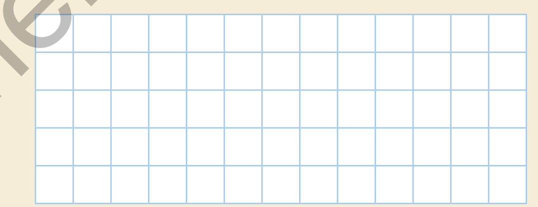
c) **Define** la función $-f$ y **traza** las gráficas de las funciones $f$ y $-f$.



d) **Prueba** que $f + f = 2f$, donde $(2f)(x) = 2f(x)$, $\forall\, x \in [-1,1]$.



e) **Prueba** que $f$ es una función par.





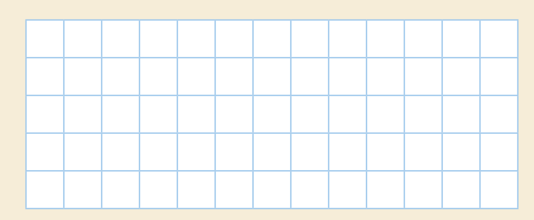
**2** Sea $f$ la función real definida en $[-1,1]$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2+1}, \text{ si } -1 \leq x < 0, \\ \sqrt{x^2+1} - 1, \text{ si } \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) **Calcula** $f(-1)$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f(0)$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f(1)$.

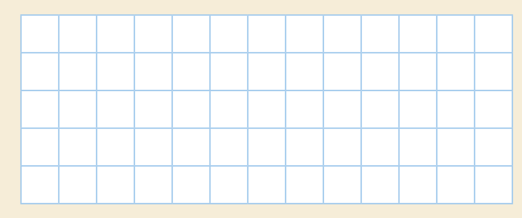


b) **Prueba** que la función $f$ es estrictamente creciente sobre $[-1,1]$.

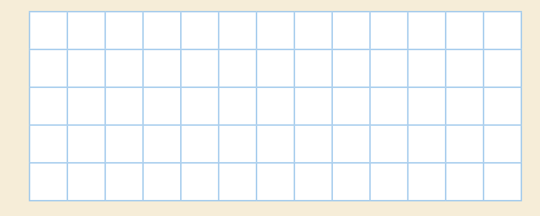


**3** Sea $w$ la función real definida en $[0,4]$ como sigue: $w = \begin{cases} 2 - x, \text{ si } 0 \leq x < 2, \\ (x-2)^2, \text{ si } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

a) **Calcula** $w(0)$, $w(1)$, $w(2)$, $w(3)$, $w(4)$.



b) **Define** la función $-w$ y **traza** las gráficas de las funciones $w$ y $-w$.



c) **Prueba** que $w + w + w = 3w$, donde $(3w)(x) = 3w(x),\ \forall x \in [0,4]$.



**4** Sean $f, g$ las funciones reales definidas como sigue: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **Define** la función que en cada ítem se propone. En el sistema de coordenadas rectangulares, **represéntala** gráficamente junto con las funciones $f, g$.

a) $fg$.

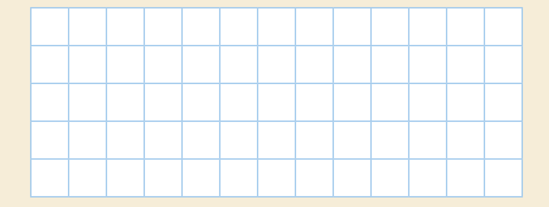


b) $(-f)\,g$.



**5** **Considera** las funciones reales $f, g$ definidas como $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = -x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

a) **Calcula** $(fg)(-1)$, $(fg)(0)$, $(fg)(\sqrt{2})$ $(fg)(\sqrt{3})$, $(fg)(2)$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Al realizar trabajos en equipo se fortalecen las relaciones entre alumnos con discapacidad y sus compañeros y compañeras de clase sin discapacidad, por lo tanto se sienten integrados.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**6** Las funciones reales $f, g$ están definidas en $[-1, \infty[$ como se indica a continuación: $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = 2 - x,\ x \in [-1, \infty[$ .

a) **Calculen** $(f+g)(-1)$, $(f+g)(0)$, $(f+g)(3)$, $(f+g)(8)$.

b) **Definan** en forma explícita las funciones siguientes: $f+g$, $f-g$, $-(f+g)$.

c) En un mismo sistema de coordenadas rectangulares, **representen** las funciones $f$, $g$, $f+g$.

**7** Sea $w$ la función real definida en $[0,4]$ como sigue: $w(x) = \begin{cases} 3 - x, \text{ si } 0 \le x < 3, \\ (x-3)^2, \text{ si } 3 \le x \le 4. \end{cases}$

a) **Calculen** $w(0)$, $w(1)$, $w(2)$, $w(3)$, $w(4)$.

b) **Prueben** que la función $w$ es estrictamente decreciente sobre $[0,3[$ y estrictamente creciente sobre $[3,4]$.

c) **Definan** la función $-w$ y **tracen** las gráficas de las funciones $w$ y $-w$.

**8** Sea $u$ la función real definida en $[-1,1]$ como sigue: $u(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ si } -1 \le x \le 0, \\ 1 - x^2, \text{ si } 0 < x \le 1. \end{cases}$

Se definen las funciones $v, w$, como

$$v(x) = \frac{1}{2}\,(u(-x) + u(x)),\quad \forall x \in [-1,1].$$

$$w(x) = \frac{1}{2}\,(u(-x) - u(x)),\quad \forall x \in [-1,1].$$

a) **Calculen** $v(-1)$, $v(\tfrac{1}{2})$, $v(0)$, $v(-\tfrac{1}{2})$, $v(1)$.

En el mismo sistema de referencia, **tracen** las gráficas de las funciones $u$ y $2v$.

DCCD: M.5.1.24. Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.



**Saberes previos**

¿Cuál es la relación entre la composición de funciones y la función inversa?



**Desequilibrio cognitivo**

¿La composición de funciones cumple con la propiedad asociativa?



**Recuerda que...**

Sean $A$, $B$, $C$ tres conjuntos no vacíos cualesquiera, $f$ una función de $A$ en $B$, $g$ una función de $B$ en $C$.

La composición de la función $g$ con la de $f$ (que se nota $g \circ f$) es la función de $A$ en $C$ definida como:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall\, x \in A$

$$g \circ f: \begin{cases} A \rightarrow C \\ x \rightarrow (g \circ f)(x) \end{cases}$$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

# Composición de funciones

Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, $f$ una función real definida en $A$, g una función real definida en todo $\mathbb{R}$. La composición de la función $g \circ f$ está definida como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

*Ejercicios resueltos*

1. Sean $A = [0,1]$, $f$ la función definida como $f(x) = sen(\pi x)$, $x \in [0,1]$ y $g$ la función definida como $g(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, $g \circ f$ es la función real definida como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(sen(\pi x))\ sen^k(\pi x), \ x \in [0,1].$$

Así,

$$k = 2, (g \circ f)(x) = sen^2(\pi x), \ x \in [0,1],$$
$$k = 5, (g \circ f)(x) = sen^5(\pi x), \ x \in [0,1].$$

Por otro lado, $f \circ g$ es la función real definida como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^k) = sen(\pi x^k), \ x \in [0,1].$$

Claramente $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Sean $f$, $g$ las funciones reales definidas en $[0, \infty[$ como $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in [0,\infty[$. Entonces, $g \circ f$ y $f \circ g$ son las funciones definidas como sigue:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [0,\infty[,$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}}, \quad x \in [0,\infty[.$$

En este caso, se verifica que $g \circ f = f \circ g$.

3. Consideremos las funciones reales definidas en el intervalo $]0,\infty[$ como $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x^3 + 1$, $x \in [0,\infty[$. Determinemos $f \circ h$, $h \circ f$ y $f \circ g \circ h$. Tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(h(x)) = f(x^3+1) = \frac{1}{x^3+1}, \quad x \in ]0,\infty[,$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 1 = \frac{1}{x^3} + 1, \quad x \in ]0,\infty[.$$

Claramente, $f \circ h \neq h \circ f$.
Determinemos $f \circ g \circ h$.

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(x^3+1) = f\left(g\left(x^3+1\right)\right)$$
$$= f\left(\sqrt{x^3+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}, \quad x \in ]0,\infty[.$$

4. Sean *f*, *g*, *h* las funciones reales definidas en el intervalo $]0,\infty[$ como

$$f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\sqrt{x}\ \text{ y }\ h(x)=x^3+1,\quad x\in]0,\infty[.$$

Si la función *w* está definida como $w(x)=\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}$, $x\in]0,\infty[$, ¿cómo se expresa *w* en términos de la composición de las funciones *f*, *g*, *h*?

La secuencia de operaciones que debe realizarse es la siguiente: sea $x\in]0,\infty[$, se calcula $\frac{1}{x}$, y a continuación se calcula $\left(\frac{1}{x}\right)^3+1=\frac{1}{x^3}+1$.

Luego se calcula $\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}$. Por lo tanto, la función *w* se expresa como $w=g\circ h\circ f$. En efecto, para $x\in]0,\infty[$, se tiene

$$w(x)=(g\circ h\circ f)(x)=g(h(f(x)))=g\left(h\left(\frac{1}{x}\right)\right)=g\left(\left(\frac{1}{x}\right)^3+1\right)$$

$$=g\left(\frac{1}{x^3}+1\right)=\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}.$$

En este mismo contexto, si *v* es la función definida en $]0,\infty[$ como $v(x)=\frac{1}{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}+1$, $x\in]0,\infty[$, ¿cómo se expresa *v* en términos de la composición de funciones con *f*, *g*, *h*?

Primero, escribimos $v(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\right)^3+1$, $x\in]0,\infty[$. Nuevamente recurrimos a la secuencia de las operaciones. Dado $x\in]0,\infty[$, calculamos $x^3+1$. Luego, $\sqrt{x^3+1}$; a continuación, $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$; y finalmente, $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\right)^3+1$. De esta secuencia, tenemos $v=h\circ f\circ g\circ h$. En efecto,

$$v(x)=(h\circ f\circ g\circ h)(x)=h(f(g(h(x))))=h(f(g(x^3+1)))=h\left(f\left(\sqrt{x^3+1}\right)\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\right)^3+1=\frac{1}{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}+1,\quad x\in]0,\infty[.$$

5. El pez róbalo se alimenta del pez gobio y este último, de plancton. La población del pez róbalo se define como la función $f(x)$, de donde *x* es el número de gobios presente y $g(x)$ es la cantidad de plancton. ¿Cuál es la función que expresa el tamaño de la población del pez róbalo en función de la cantidad de plancton?

$$f(x)=50+\sqrt{\tfrac{x}{150}};\ g(x)=4x+3.$$

$$f\circ g(x)=f(g(x));\ f(g(x))=50+\sqrt{\tfrac{g(x)}{150}};\ f(g(x))=50+\sqrt{\tfrac{4x+3}{150}}.$$



**Interdisciplinariedad**

**Matemática y piscicultura**

La piscicultura es una actividad que permite cultivar los ríos con especies de peces que están en vías de extinción debido a las diversas formas de contaminación del medio ambiente. La composición de funciones permite analizar situaciones como la cantidad de alimento que se requiere para una determinada piscina o cultivo.



Shutterstock, (2020). 309186437

▲ Alimentación de peces.

**Glosario**

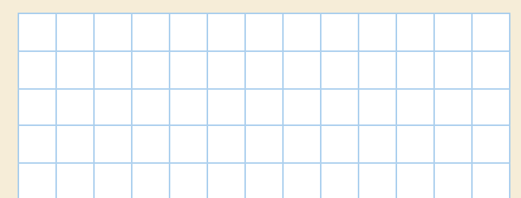
**piscicultura.** Conjunto de técnicas y conocimientos relativos a la cría artificial de peces y mariscos.

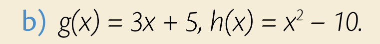
# Taller práctico

DCCD: M.5.1.24. Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.

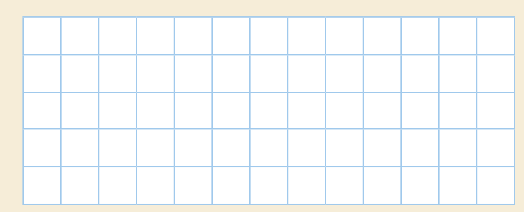
**1** **Considera** las funciones reales $g$ y $h$ definidas en $\mathbb{R}$ que en cada ítem se definen, donde $x \in \mathbb{R}$. **Halla** $h \circ g$ y $g \circ h$.

a) $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = 3x + 2$.

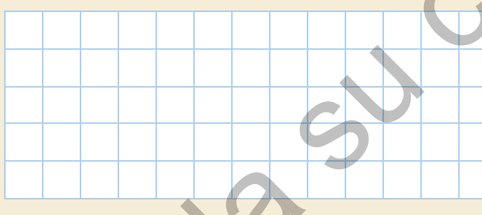




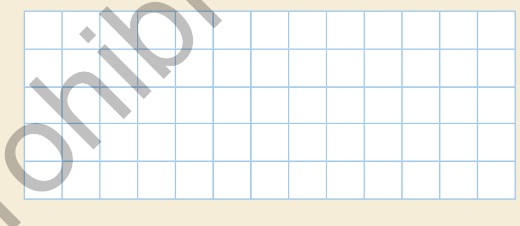
b) $g(x) = 3x + 5$, $h(x) = x^2 - 10$.



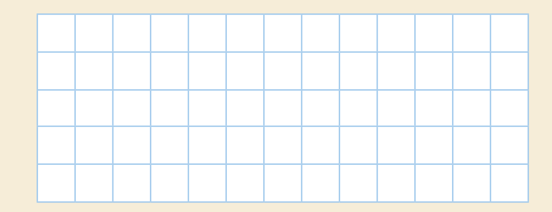
c) $g(x) = x^3$, $h(x) = 8x$.



d) $g(x) = x^3$, $h(x) = \sqrt{2x^4}$.



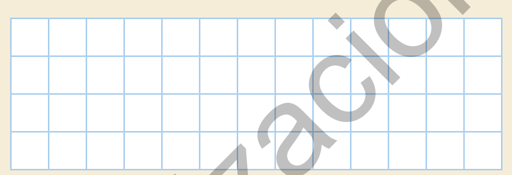
e) $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{si } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$ $\quad h(x) = x^{\frac{1}{3}}$.



**2** Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función biyectiva. Se definen las funciones $u$, $v$, $w$ como sigue: $u(x) = (f(x))^n$, $v(x) = (f(x))^{1/n}$,

$$w(x) = \frac{1}{(f(x))^{1/n}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^+.$$

**Halla** $u \circ v$, $u \circ w$ y $u \circ v \circ w$.



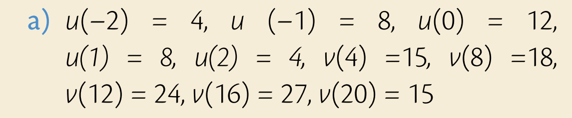
**3** Sean $f, g \in F(\mathbb{R}^+)$ definidas como $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$.

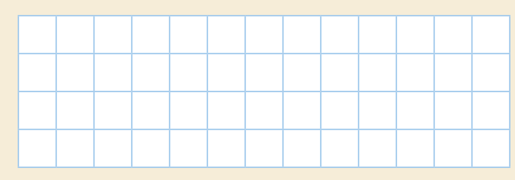
**Halla**: $f \circ f$; $g \circ g$; $f \circ g$; $g \circ f$.



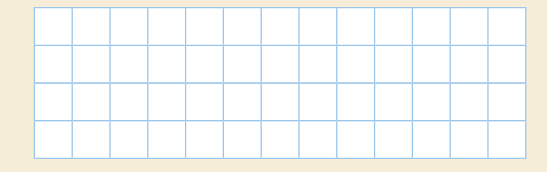
**4** **Considera** los conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, $C = \{15, 18, 21, 24, 27\}$, $u$ la función de $A$ en $B$, $v$ la función de $B$ en $C$. Para cada caso, **halla** $v \circ u$.

a) $u(-2) = 4$, $u(-1) = 8$, $u(0) = 12$, $u(1) = 8$, $u(2) = 4$, $v(4) = 15$, $v(8) = 18$, $v(12) = 24$, $v(16) = 27$, $v(20) = 15$

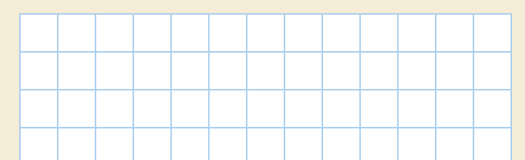




b) $u(-2) = 20$, $u(-1) = 16$, $u(0) = 12$, $u(1) = 8$, $u(2) = 4$, $v(4) = 27$, $v(8) = 24$, $v(12) = 21$, $v(16) = 18$, $v(20) = 15$.

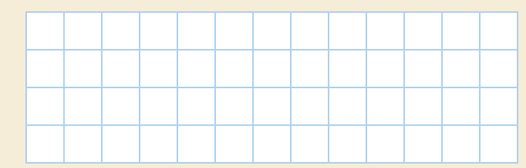


c) $u(-2) = 12, u(-1) = 20, u(0) = 12, u(1) = 20, u(2) = 12, v(4) = 27, v(8) = 24, v(12) = 21, v(16) = 21, v(20) = 24$.

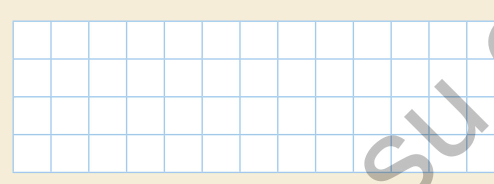


**5** Sean $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $u$, $v$, $w$ tres funciones de $A$ en $A$ definidas a continuación:
$u(-1) = 0, u(0) = 2, u(1) = 1, u(2) = -1,$
$v(-1) = 0, v(0) = 1, v(1) = 2, v(2) = -1,$
$w(-1) = 0, w(0) = -1, w(1) = 2, w(2) = 1.$
**Determina:**

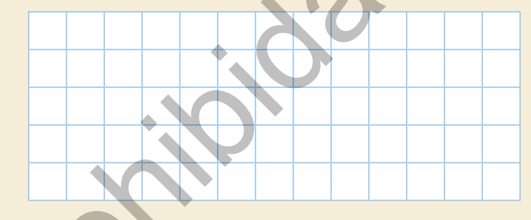
a) $v \circ u$.



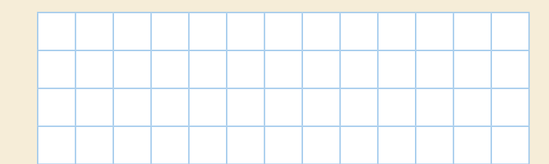
b) $w \circ v$.



c) **Verifica** que $w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.



**6** Sean $u$, $v$ las funciones definidas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que se definen a continuación:
$u(x) = x^2 + 1,\ v(x) = -\frac{x}{3} - 1,\ \forall x \in \mathbb{Q}$,
**Determina** las funciones compuestas: $u \circ v$ y b) $v \circ u$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando algún compañero tiene una discapacidad motriz que no le permita autonomía, al trabajar en equipo debemos ceder espacios físicos y respetar su condición.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

$$\begin{cases} f^{(0)}(x) = x;\ \forall x \in A \\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \circ f\right)(x) = f^{(n-1)}\left(f(x)\right), \\ \forall x \in A,\ n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$$

**7** A partir del concepto anterior, y considerando que el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y que $f$ es la función definida por $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a$, **hallen:**

a) $f^{(2)}(a), f^{(2)}(b), f^{(2)}(c)$.

b) $f^{(3)}(a), f^{(3)}(b), f^{(3)}(c)$.

c) $f^{(4)}(a), f^{(4)}(b)$.

**8** Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f$, $g$ las funciones de $A$ en $A$ definidas como sigue:
$f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3$
$g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 4, g(4) = 3.$
**Determinen:**

a) $f^{(5)}(1)$.

b) $(f^{(3)} \circ g^{(4)})(2)$.

c) $(f^{(2)} \circ g^{(2)} \circ f^{(2)})(3)$.

d) $(g^{(3)} \circ f^{(2)} \circ g)(4)$.

e) $(g^{(4)} \circ f^{(3)} \circ g^{(2)} \circ f)(1)$

**9** Se define la función $f$. **Determina** las funciones compuestas $f \circ f, f \circ f \circ f$.
**Calcula** algunos valores de estas funciones compuestas.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = -x + 1 \end{cases}$$

DCCD: M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en $\mathbb{R}^3$.



**Saberes previos**

¿Por dos puntos, cuántas rectas pueden pasar?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué son los puntos colineales?



**Recuerda la definición**

La ecuación $\vec{x}=\vec{u}+t\vec{v}$, $\forall t\in\mathbb{R}$ se conoce como ecuación vectorial de la recta $R$. El vector $\vec{v}$ se llama vector director de la recta $R$.
Las ecuaciones paramétricas de la recta $R$ para $\mathbb{R}^2$ son:

$$\begin{cases} x=a+tc, \\ y=b+td. \end{cases}$$

Siendo $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$.



**Glosario**

colineales. Dicho de un punto: que se encuentra en la misma recta que otro.

# Ecuación vectorial y paramétrica de una recta en el espacio

**Definición.** Sean $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ con $\vec{b}$ no nulo. El conjunto $R$ definido como $R=\left\{\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$ representa una recta que pasa por $\vec{a}$ y es paralela al vector $\vec{b}$. El vector $\vec{b}$ se llama vector director de la recta $R$.

La ecuación $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$, $\forall t\in\mathbb{R}$ se llama **ecuación vectorial** de la recta $\mathbb{R}$ en la que el número real $t$ se llama **parámetro**.

Nota que $R\subset\mathbb{R}^3$ y los elementos de $R$ son puntos $\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que se expresan en la forma $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$, para algún $t\in\mathbb{R}$.

Tenemos la siguiente equivalencia:

$\vec{x}\in R\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}$, tal que $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{b}$,

y su negación $\vec{x}\notin R\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R}$, tal que $\vec{x}\neq\vec{a}+t\vec{b}$.

### Ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos

Dados los puntos $\vec{p}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{q}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ con $\vec{p}\neq\vec{q}$, la **ecuación vectorial** de la recta $R$ que pasa por estos dos puntos se deduce así: El vector director $\vec{b}$ de la recta $R$,

$\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$, es el vector director de la recta $R$. La ecuación vectorial de esta recta está definida como

$$\vec{x}=\vec{p}+t\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)+t(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3),\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Analizamos las ecuaciones vectorial y paramétrica de la recta $R$ a través de ejemplos.

*Ejemplos resueltos*

1. Sean $\vec{v}=(2,\ 1,\ 3)$ y $R=\left\{\vec{x}=t(2,\ 1,\ 3)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$. Sea $R\subset\mathbb{R}^3$ la representación de una recta que pasa por el origen $\vec{0}=(0,\ 0,\ 0)$ y es paralela al vector $\vec{v}$. La ecuación vectorial de la recta $R$ está definida como $\vec{x}=t(2,\ 1,\ 3)$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Algunos elementos de $R$ son:

   para $t=-1$, $\vec{x}=-1(2,\ 1,\ 3)=(-2,\ -1,\ -3)$,

   para $t=0$, $\vec{x}=0(2,\ 1,\ 3)=(0,\ 0,\ 0)=\vec{0}$,

   si $t=-3s+5$, $\forall s\in\mathbb{R}$,

   $\vec{x}=(-3s+5)(2,\ 1,\ 3)=(2(-3s+5),\ -3s+5,\ 3(-3s+5))$.

   De la ecuación vectorial $\vec{x}=t(2,1,3)$, $\forall t\in\mathbb{R}$, se obtienen las ecuaciones paramétricas.

   Para el efecto, sea $\vec{x}=(x,y,z)\in R$, existe $t\in\mathbb{R}$ tal que

   $$\vec{x}=(x,y,z)=t(2,1,3)=(2t,t,3t),$$

y de la definición de la igualdad de elementos de $\mathbb{R}^3$, resulta $\begin{cases} x=2t, \\ y=t, \\ z=3t. \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de la recta $R$ están definidas como

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t, \end{cases}$$

Si cambiamos el parámetro t por otro de la forma $t = 2s - 5$, $\forall s \in \mathbb{R}$, las ecuaciones paramétricas de la recta $R$ se escriben como

$$\begin{cases} x = 2(2s-5), \\ y = 2s - 5, \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \\ z = 3(2s-5), \end{cases}$$

Desde el punto de vista conjuntista,

$$R = \{(2t,\ t,\ 3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(2(2s-5),\ 2s-5,\ 3(2s-5)) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

2. Sean $\vec{u} = (-1,\ 1,\ 2)$, $\vec{a} = (1,\ 2,\ 5)$. Encuentra la recta $R$ que pasa por los puntos $\vec{u}$ y $\vec{a}$. Para determinar este conjunto $R$, tenemos presente que $\vec{u} \in R$, y debemos encontrar un vector director $\vec{b}$ de la recta $R$. Entonces,

$$\vec{b} = \vec{a} - \vec{u} = (1,\ 2,\ 5) - (-1,\ 1,\ 2) = (2,\ 1,\ 3),$$

con lo que $R$ es el conjunto definido como

$$R = \{\vec{x} = (-1,\ 1,\ 2) + t(2,\ 1,\ 3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

La ecuación vectorial de esta recta está definida como $\vec{x} = (-1,\ 1,\ 2) + t(2,\ 1,\ 3)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Algunos elementos de R:

si $t = -2$, $\vec{x} = (-1,\ 1,\ 2) - 2(2,\ 1,\ 3) = (-5,\ -1,\ -4)$,

si $t = -s + 5$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = (-1,\ 1,\ 2) + (-s+5)(2,\ 1,\ 3)$
$= (9 - 2s,\ 6 - s,\ 17 - 3s)$.

De la ecuación vectorial $\vec{x} = (-1,\ 1,\ 2) + t(2,\ 1,\ 3)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, se obtienen las ecuaciones paramétricas. Sea $\vec{x} = (x, y, z) \in R$, existe $t \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{x} = (x, y, z) = (-1, 1, 2) + t(2, 1, 3) = (-1 + 2t, 1 + t, 2 + 3t)$, y de la definición de la igualdad de elementos de $\mathbb{R}^3$ resultan las ecuaciones paramétricas que representan a la recta $R$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 + t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$$

Si cambiamos el parámetro $t$ por otro de la forma $t = 5s - 1$, $\forall s \in \mathbb{R}$, las ecuaciones paramétricas de la recta $R$ se escriben como:

$$\begin{cases} x = -1 + 2(5s-1), \\ y = 5s, \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 3(5s-1), \end{cases}$$

Desde el punto de vista conjuntista,

$$R = \{(-1,\ 1,\ 2) + (2t,\ t,\ 3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(-1 + 2(5s-1),\ 5s,\ 2 + 3(5s-1)) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$



**Interdisciplinariedad**

**Matemática y ciencias**

Las ecuaciones vectoriales y paramétricas de una recta constituyen las ecuaciones más simples que surgen en aplicaciones de ingenierías, economía y ciencias (como la física, la química o la biología). En física, por ejemplo, estas ecuaciones describen el movimiento de cuerpos en trayectorias rectilíneas.



Shutterstock, (2020). 153747884

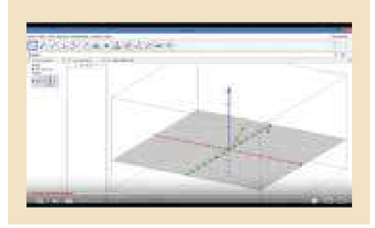
▲ Render de un edificio en 3D.



**Conexiones con las TIC**

El *software* libre GeoGebra te permite graficar la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$, dados un punto y un vector. Puedes **ingresar** al siguiente enlace para observar cómo se hace esto:

***bit.ly/2ZMNAzy***



# Taller práctico

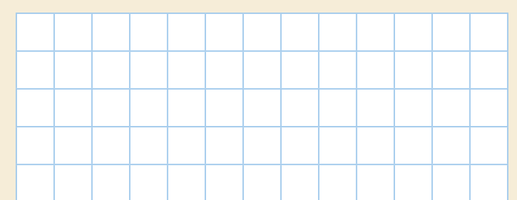
DCCD: M.5.2.20. Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en $\mathbb{R}^3$.



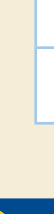
**1** **Considera** la recta

$R=\left\{\vec{x}=(2,\ 8,\ -1)+t(-3,\ -1,\ 2)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$.

a) **Prueba** que los siguientes puntos pertenecen a la recta R : (2, 11, –3), (2, 8, –1), (–7, 5, 5).



b) **Prueba** que los siguientes puntos no pertenecen a R : (8, 10, 5), (2, 8, 0), (–7, 5, 7).



**2** Sean $\vec{v}=(-2,\ 1,\ -3)$ y

$R=\left\{\vec{x}=t(-2,\ 1,\ -3)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$.

**Obtén** las ecuaciones paramétricas de la recta $R$.

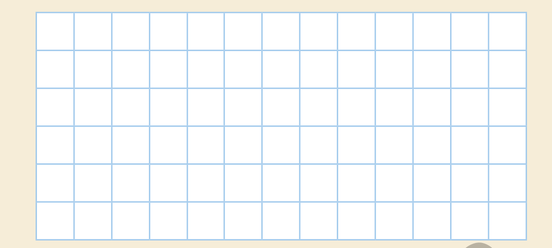


**3** Las ecuaciones paramétricas de una recta R están definidas como

$$\begin{cases} x=2-5t, \\ y=5+3t, \quad \forall t\in\mathbb{R}. \\ z=1-3t, \end{cases}$$

**Obtén** la ecuación vectorial de la recta R y **verifica** que

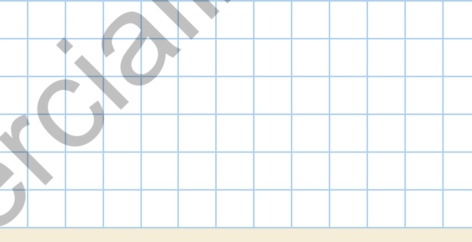
$R=\left\{\vec{x}=(2,\ 5,\ 1)+t(-5,\ 3,\ -3)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$.



**4** **Considera** los puntos (3, 1, 5), (2, –2, 7) de $\mathbb{R}^3$.

a) **Muestra** que la recta R que pasa por estos dos puntos está definida como

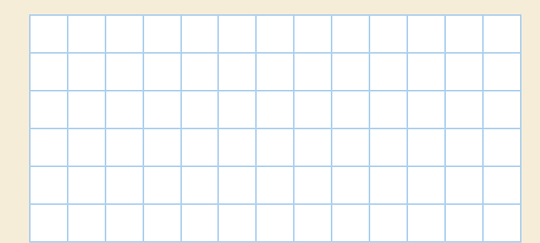
$R=\left\{\vec{x}=(3,\ 1,\ 5)+t(-1,\ -3,\ 2)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$.

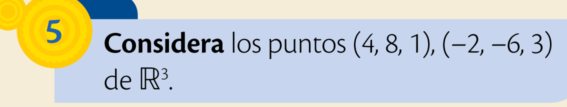


b) **Prueba** que las ecuaciones

$$\begin{cases} x=-2r, \\ y=-6r-8, \quad \forall r\in\mathbb{R}, \\ z=4r+11, \end{cases}$$

son ecuaciones paramétricas de esta recta $R$.

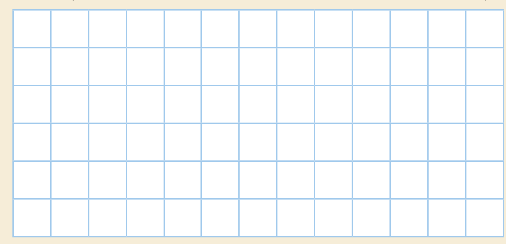




**5** **Considera** los puntos (4, 8, 1), (–2, –6, 3) de $\mathbb{R}^3$.

a) **Muestra** que la recta R que pasa por estos dos puntos está definida como

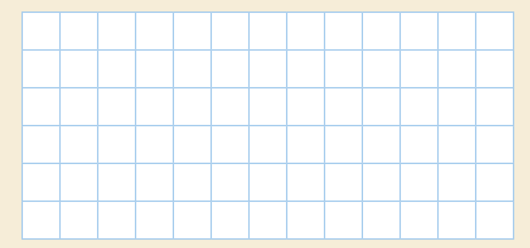
$R=\left\{\vec{x}=(4,\ 8,\ 1)+t(-6,\ -14,\ 2)\,|\,t\in\mathbb{R}\right\}$.



b) **Prueba** que las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 4 - 6r, \\ y = 8 - 14r, \ \forall r \in \mathbb{R}, \text{ son ecuaciones} \\ z = 1 + 2r, \end{cases}$$

paramétricas de esta recta $R$.



**6** Dados los subconjuntos $R_1$, $R_2$ de $\mathbb{R}^3$, definidos como

$$R_1 = \left\{ \vec{x} = t(4,\ 5,\ -1) \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ \vec{x} = s\left(-1,\ -\frac{5}{4},\ \frac{1}{4}\right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Prueba** que $R_1$, $R_2$ representan la misma recta $R$, es decir, $R_1 = R_2$.

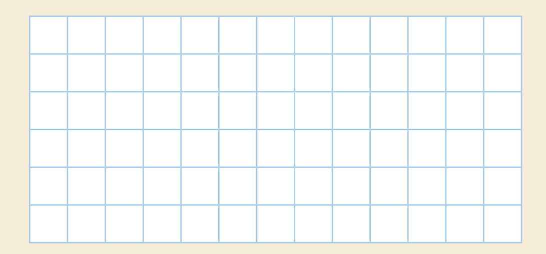


**7** Dados los subconjuntos $S_1$, $S_2$ de $\mathbb{R}^3$, definidos como

$$S_1 = \left\{ \vec{x} = t(0,\ 5,\ -1) \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \vec{x} = (0,\ 10,\ -2) + r(0,\ 5,\ -1) \mid r \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Prueba** que $S_1$, $S_2$ representan la misma recta $S$, es decir, $S_1 = S_2$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando trabajamos con estudiantes con discapacidades asociadas al lenguaje es necesario utilizar diferentes apoyos o técnicas como la lectura labial o de señas y propiciar un ambiente relajado antes de que ellos hablen.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**8** **Consideren** los subconjuntos $R_1$, $R_2$ de $\mathbb{R}^3$ definidos como

$$R_1 = \left\{ \vec{x} = (1,\ 1,\ 1) + t(3,\ 1,\ 2) \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ \vec{x} = (-5,\ -1,\ -3) + s(3,\ 1,\ 2) \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Prueben** que $R_1$, $R_2$ representan la misma recta $R$, es decir que $R_1 = R_2$.

**9** **Consideren** los subconjuntos $R_1$, $R_2$ de $\mathbb{R}^3$ definidos como

$$R_1 = \left\{ \vec{x} = (10,\ 3,\ 7) + r(2,\ 3,\ 4) \mid r \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ \vec{x} = (6,\ -3,\ -1) + s\left(1,\ \frac{3}{2},\ 2\right) \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Prueben** que $R_1$, $R_2$ representan la misma recta $R$, esto es, $R_1 = R_2$.

**10** Sean $R_1$, $R_2$ los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos como sigue:

$$R_1 = \left\{ \vec{u} = a(2,\ 3,\ -2) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ \vec{v} = b(-1,\ 1,\ 1) \mid b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Prueben** $R_1 \cap R_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$.

**11** **Hallen** la ecuación vectorial y paramética de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1, 2)$ y $B(1, 2, 4)$.

a) **Determinen** primero las coordenadas del vector director.
b) **Encuentren** la ecuación vectorial de la recta.
c) **Hallen** la ecuación paramétrica de la recta.

DCCD: M.5.2.21. Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto. M.5.2.22. Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos.



**Saberes previos**

¿Qué es un plano en el espacio?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Son las ecuaciones de los planos dependientes de dos parámetros?

**Recuerda que...**

Los vectores generadores del plano ∏ no son únicos, lo que significa que un mismo plano ∏ puede tener una infinidad de ecuaciones vectoriales.

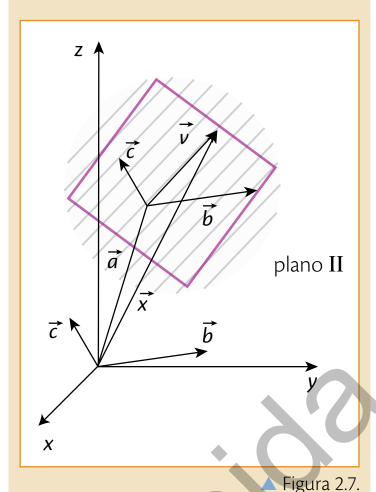



Figura 2.7.

**Glosario**

escalares. Dicho de una magnitud: que carece de dirección, como, por ejemplo, la temperatura.

# Ecuaciones del plano

## Ecuación vectorial del plano

**Definición.** Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{b}, \vec{c}$ no nulos y no colineales. El conjunto ∏ definido como

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c} \,|\, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

se llama "plano que pasa por $\vec{a}$ y está generado por los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$".

La ecuación $\vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$ $\forall u,\ v \in \mathbb{R}$ se llama **ecuación vectorial del plano ∏** en la que los números reales *u*, *v* se llaman parámetros.

Puesto que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c} \in \mathbb{R}^3, \forall u, v \in \mathbb{R}$, resulta que $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. De la definición del conjunto ∏ se tiene la siguiente equivalencia: $\vec{x} \in \Pi \Leftrightarrow \exists\ u, v \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$.

Nota que para que $\vec{x} \in \Pi$ se deben hallar dos números reales *u*, *v*, tal que $\vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$.

Su negación se expresa como

$$\vec{x} \notin \Pi \Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{R} \text{ se tiene } \vec{x} \neq \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}.$$

En la Figura 2.7. se muestran los vectores $\vec{b}, \vec{c}$ no nulos y no colineales, el vector $\vec{a}$, el vector $\vec{v} = u\vec{b} + v\vec{c}$, y el vector $\vec{x} = \vec{a} + \vec{v} \in \Pi$.

## Ecuación paramétrica del plano

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{x} = (x, y, z)$ vectores de $\mathbb{R}^3$, con $\vec{b}, \vec{c}$ no nulos y no colineales. De la definición del plano ∏ y de la definición de las operaciones de adición y producto por escalares en $\mathbb{R}^3$, se tiene:

$$\vec{x} = (x, y, z) \in \Pi \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}$$

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + u(b_1, b_2, b_3) + v(c_1, c_2, c_3)$$

$$= \left(a_1 + ub_1 + vc_1, a_2 + ub_2 + vc_2, a_3 + ub_3 + vc_3\right).$$

De la definición de igualdad de elementos de $\mathbb{R}^3$, la última igualdad se expresa como el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x = a_1 + ub_1 + vc_1, \\ y = a_2 + ub_2 + vc_2, \\ z = a_3 + ub_3 + vc_3, \end{cases}$$

que se conoce con el nombre de **ecuación paramétrica del plano ∏**. Los números reales *u*, *v* se llaman parámetros. De estas tres ecuaciones podemos obtener la ecuación cartesiana que representa al plano ∏, eliminando los parámetros *u*, *v*.

Dados $\vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{b}, \vec{c}$ no nulos y no colineales, el conjunto $\Pi = \left\{ \vec{x} = u\vec{b} + v\vec{c} \,|\, u, v \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ representa un plano que pasa por el origen.

*Ejercicios resueltos*

1. A continuación se definen los planos mutuamente perpendiculares, formados en el sistema de referencia tridimensional:

$$\Pi_{xy}=\left\{\vec{x}=x\vec{i}+y\vec{j}\,|\,x,y\in\mathbb{R}\right\},\ \Pi_{xz}=\left\{\vec{x}=x\vec{i}+z\vec{k}\,|\,x,z\in\mathbb{R}\right\},$$

$\Pi_{yz}=\left\{\vec{x}=y\vec{j}+z\vec{k}\,|\,y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Nota que:

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\in\Pi_{xy}\Leftrightarrow\exists x,y\in\mathbb{R},$ tal que

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}=x(1,\ 0,\ 0)+y(0,\ 1,\ 0)=(x,\ y,\ 0),$

y de la definición de igualdad de elementos de $\mathbb{R}^3$, resulta $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = 0$. Así $\vec{a}=(x,\ y,\ 0)$. Todo punto $\vec{a}$ del plano $\Pi_{xy}$ tiene la tercera componente igual a cero. Asimismo, el punto del plano $\Pi_{xz}$ tiene la forma $(x, 0, z)$, y el punto del plano $\Pi_{yz}$ tiene la forma $(0, y, z)$. Por ejemplo, si cambiamos $x$ por $x = 2r + 3$, $y = -3s -1$, en la ecuación vectorial del plano $\Pi_{xy}$, $\vec{x}=x\vec{i}+y\vec{j},\ \forall x,\ y\in\mathbb{R},$ se obtiene

$$\vec{x}=(2r+3)\vec{i}+(-3s-1)\vec{j},\ \forall r,s\in\mathbb{R},$$

que es otra ecuación vectorial del plano $\Pi_{xy}$ .

2. Sean $\vec{a}=(1,\ 1,\ 0)$, $\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)$, $\vec{c}=(1,\ 0,\ 1)$. El plano $\Pi$ que pasa por $\vec{a}$, y está generado por los vectores $\vec{b},\vec{c}$ es el conjunto definido como:

$\Pi=\left\{\vec{x}=(1,\ 1,\ 0)+u(0,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 1)\,|\,u,\ v\in\mathbb{R}\right\}.$

Por las propiedades de la adición y producto por escalares en $\mathbb{R}^3$, se tiene $\Pi=\left\{\vec{x}=(1+v,\ 1+u,\ u+v)\,|\,u,\ v\in\mathbb{R}\right\}$. Luego,

$(x,\ y,\ z)\in\Pi\Leftrightarrow\exists u,v\in\mathbb{R},$ tal que $(x,\ y,\ z)=(1+v,\ 1+u,\ u+v).$

De la definición de igualdad de elementos de $\mathbb{R}^3$ se obtienen las ecuaciones paramétricas del plano

$$\Pi:\ \begin{cases} x=1+v, \\ y=1+u, & \text{donde } u,\ v\in\mathbb{R} \text{ son los parámetros.} \\ z=u+v, \end{cases}$$

## Ecuación cartesiana del plano

De las ecuaciones paramétricas podemos obtener la **ecuación cartesiana** que representa el plano $\Pi$. Para el efecto, se deben eliminar los parámetros $u$ y $v$ de estas tres ecuaciones. De la primera se obtiene $v = x - 1$; de la segunda se tiene $u = y - 1$; reemplazamos en la tercera. Entonces, $z=u+v=x-1+y-1=x+y-2$.

Así, $x + y - z = 2$. Esta es la ecuación cartesiana del plano $\Pi$.

Tenemos así, $\Pi=\left\{\vec{x}=(1,\ 1,\ 0)+u(0,\ 1,\ 1)+v(1,\ 0,\ 1)\,|\,u,v\in\mathbb{R}\right\}$

$$=\left\{\vec{x}=(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+y-z=2\right\}.$$



**Recuerda que...**

En el sistema de referencia tridimensional, tenemos tres planos mutuamente perpendiculares que se denominan plano *xy*, plano *xz*, plano *yz* que se denotan $\Pi_{xy}$, $\Pi_{xz}$, $\Pi_{yz}$. Por otro lado, los vectores de $\mathbb{R}^3$, definidos como:

$\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$,

son unitarios y ortogonales; es decir,

$\|\vec{i}\| = 1$, $\|\vec{j}\| = 1$, $\|\vec{k}\| = 1$,

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$, $\vec{i}\cdot\vec{k} = 0$, $\vec{j}\cdot\vec{k} = 0$.

**Glosario**

paramétrica. Perteneciente o relativo al parametro.

parámetro. Variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico

1. Sea $S=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-5y+3z=3\right\}$, prueba que el subconjunto $S$ de $\mathbb{R}^3$ representa un plano. Para el efecto, a este conjunto $S$ lo expresamos como uno de la forma

$$\Pi=\left\{\vec{x}=\vec{a}+u\vec{x}+v\vec{x} \mid u,v\in\mathbb{R}\right\}.$$

De la definición del conjunto $S$ se tiene:

$$\vec{x}=(x,y,z)\in S \Leftrightarrow 2x-5y+3z=3.$$

**Primera opción.** De la ecuación, obtenemos $x$ en términos $y$, $z$, en cuyo caso tenemos: $x=\frac{1}{2}(3-3z+5y)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}y.$

Luego, de las operaciones de adición y producto por escalares se obtiene:

$$\vec{x}=(x,y,z)=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z+\frac{5}{2}y,y,z\right)=\left(\frac{3}{2},0,0\right)+\left(\frac{5}{2}y,y,0\right)+\left(-\frac{3}{2}z,0,z\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2},0,0\right)+y\left(\frac{5}{2},1,0\right)+z\left(-\frac{3}{2},0,1\right).$$

Así, $\vec{x}=(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$,

donde $\vec{a}=\left(\frac{3}{2},0,0\right)$, $\vec{b}=\left(\frac{5}{2},1,0\right)$, $\vec{c}=\left(-\frac{3}{2},0,1\right)$; en consecuencia,

$$S=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-5y+3z=3\right\}$$

$$=\left\{\vec{x}=\left(\frac{3}{2},0,0\right)+u\left(\frac{5}{2},1,0\right)+v\left(-\frac{3}{2},0,1\right) \mid u,v\in\mathbb{R}\right\}.$$

La ecuación vectorial del plano $S$ es:

$$\vec{x}=\left(\frac{3}{2},0,0\right)+u\left(\frac{5}{2},1,0\right)+v\left(-\frac{3}{2},0,1\right),\ \forall u,v\in\mathbb{R},$$

donde $u$, $v\in\mathbb{R}$ designan los parámetros de esta ecuación. Nota que las variables $x$, $y$ se han cambiado por $u$, $v$ respectivamente. Además $\left(\frac{3}{2},0,0\right)\in S$.

**Segunda opción.** Obtenemos $y$ en términos de $x$, $z$ y procedemos en forma similar.

$$y=-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}z,\ \vec{x}=(x,y,z)=\left(x,-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}z,z\right)$$

$$=\left(0,-\frac{3}{5},0\right)+x\left(1,\frac{2}{5},0\right)+z\left(0,\frac{3}{5},1\right).$$

Luego, $S=$ $S=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-5y+3z=3\right\}$

$$=\left\{\left(0,-\frac{3}{5},0\right)+u\left(1,\frac{2}{5},0\right)+v\left(0,\frac{3}{5},1\right) \mid u,v\in\mathbb{R}\right\}.$$

La ecuación vectorial es:

$$\vec{x}=\left(0,-\frac{3}{5},0\right)+u\left(1,\frac{2}{5},0\right)+v\left(0,\frac{3}{5},1\right),\ \forall u,v\in\mathbb{R}.$$

**Tercera opción.** Obtenemos $z$ en términos de $x$, y $y$ procedemos en forma similar. Se obtiene: $S=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x-5y+3z=3\right\}$

$$=\left\{(0,0,1)+u\left(1,0,-\frac{2}{3}\right)+v\left(0,1,\frac{5}{3}\right) \mid u,v\in\mathbb{R}\right\}.$$



**Interdisciplinariedad**

**El mundo real es tridimensional**

Gran cantidad de los cuerpos, edificios, materiales y objetos que manipulamos a diario son subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, y los vectores en $\mathbb{R}^3$ son necesarios para modelar la realidad.



Shutterstock, (2020). 513362959

▲ Representación en 3D de teléfono inteligente.

## Ecuación de la recta formada por la intersección de dos planos

Analizamos este tema a través de ejemplos.

**1.** Sean $\Pi_1$, $\Pi_2$, los planos definidos como

$$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y = 0 \right\},\ \Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \right\}.$$

Probemos que $\Pi_1 \cap \Pi_2$ es una recta.

$$\vec{x} = (x,y,z) \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \Leftrightarrow (x,y,z) \in \Pi_1 \wedge (x,y,z) \in \Pi_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ x + z = 0. \end{cases}$$ Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

De la primera ecuación se tiene x= $\frac{2}{3}$ y. Reemplazamos en la segunda, z = −x = $-\frac{2}{3}$ y, luego,

$$\vec{x} = (x,y,z) = \left( \frac{2}{3}y, y, -\frac{2}{3}y \right) = \frac{y}{3}(2,3,-2),$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \frac{y}{3}(2,3,-2) \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ w(2,3,-2) \mid w \in \mathbb{R} \right\}.$$

El vector director de esta recta es $(2,3,-2) \in \mathbb{R}^3$. Nota que se ha hecho el cambio de parámetros $w = \frac{y}{3}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

**2.** Sean $\vec{a} = (5,-2,3)$, $\mathbb{R}$ = {t (5, −2, 3) l t $\in \mathbb{R}$} Halla dos planos $\Pi_1$, $\Pi_2$, tal que $R = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

De la definición de la recta $R$ se tiene

$$\vec{x} = (x,y,z) \in R \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{x} = t(5,-2,3),$$

entonces $(x,y,z) = t(5,-2,3) = (5t,-2t,3t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5t, \\ y = -2t, \\ z = 3t. \end{cases}$

Eliminemos el parámetro $t$ de estas ecuaciones. De la primera, se tiene $t = \frac{x}{5}$; reemplazando en la segunda y tercera ecuaciones, se obtiene $2x + 5y = 0$; $3x - 5z = 0$, respectivamente. Se definen los conjuntos

$$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 5y = 0 \right\},\ \Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5z = 0 \right\}.$$

Los conjuntos $\Pi_1$, $\Pi_2$ representan planos que pasan por el origen. Además, $R \subset \Pi_1$, esto es, $\vec{x} \in R \Rightarrow \vec{x} \in \Pi_1$. En efecto, como

$$\vec{x} = t(5,\ -2,\ 3) = (5t,\ -2t,\ 3t) \in R,$$

entonces $\vec{x} = (5t,\ -2t,\ 3t) \in \Pi_1$.

La ecuación cartesiana que representa al plano $\Pi_1$ está definida como $\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $2x + 5y = 0$. Luego,
$2(5t) + 5(-2t) = 10t - 10t = 0$, que prueba que $\vec{x} = (5t,-2t,3t) \in \Pi_1$.
Así, $R \subset \Pi_1$. De manera similar, se prueba que $R \subset \Pi_2$. En conclusión, $R \subset \Pi_1$. $R \subset \Pi_2$. Luego, $R \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$.

### Simbología matemática

Algunos símbolos utilizados en esta unidad son:

Plano: $\Pi_1$
Vector: $\vec{x}$
Perpendicular: $\perp$
Paralelo: $||$
Intersección: $\cap$
Subconjunto: $\subset$

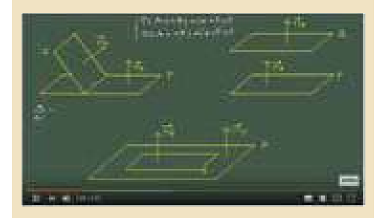


### Conexiones con las TIC

Para conocer más acerca de la posición relativa entre planos, puedes **ingresar** al siguiente enlace

***bit.ly/2IRa8tE***

y observar el video.



### Glosario

relativa. Que guarda relación con alguien o con algo.

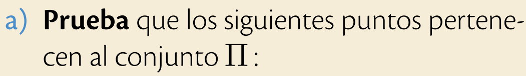
# Taller práctico

DCCD: M.5.2.21. Determinar la ecuación vectorial de un plano a partir de un punto del plano y dos vectores dirección; a partir de tres puntos del plano; a partir de una recta contenida en el plano y un punto. M.5.2.22. Determinar la ecuación de la recta formada como intersección de dos planos como solución del sistema de ecuaciones planteado por las ecuaciones de los planos.



**1** **Considera** el plano $\Pi$ definido como

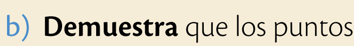
$$\Pi = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x - 2y + 3z = 1 \right\}.$$



a) **Prueba** que los siguientes puntos pertenecen al conjunto $\Pi$:

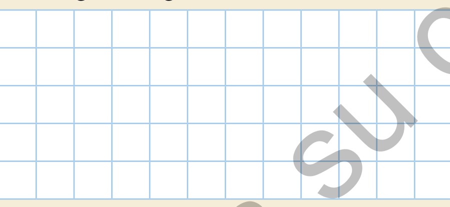
$$(3, 3, -\frac{5}{3}), (0, 1, 1), (-1, -2, \frac{1}{3}), (0, 0, \frac{1}{3}).$$





b) **Demuestra** que los puntos

$$(1, 0, -\frac{4}{3}),\ (0, 1, \frac{2}{3}) \notin \Pi.$$



c) **Demuestra** que

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = (0, 0, \frac{1}{3}) + s(1, 0, -\frac{4}{3}) + t(0, 1, \frac{2}{3}) \,|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$



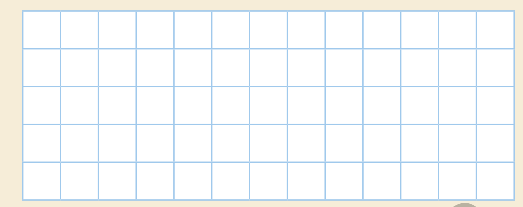
**2** Sean $\Pi$ un plano, $R_1$, $R_2$ rectas definidas como

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + 2y - z = 0 \right\},$$

$$R_1 = \left\{ x(1, 0, 3) \,|\, x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$R_2 = \left\{ y(0, 1, -1) \,|\, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) **Demuestra** que $R_1 \cap R_2 = \left\{ \vec{0} \right\}$.



b) **Prueba** que $R_1 \subset \Pi$, $R_2 \subset \Pi$.

c) Sea $R_3 = \left\{ s(-3, 0, 1) \,|\, s \in \mathbb{R} \right\}$, **prueba** que $R_1 \perp R_3$.

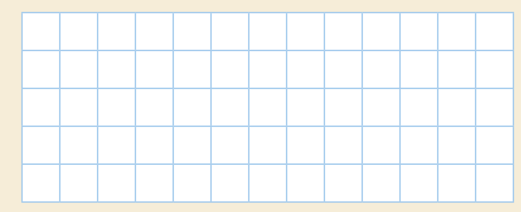


**3** **Considera** el plano

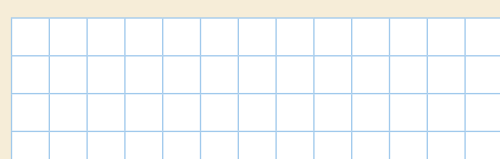
$$\Pi = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + 2y - z = 0 \right\}.$$

a) **Prueba** que

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = x(1, 0, 3) + y(0, 1, 2) \,|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$



b) **Verifica** que $\vec{n} = (1, 0, 3) \times (0, 1, 2) = (3, 2, -1)$.

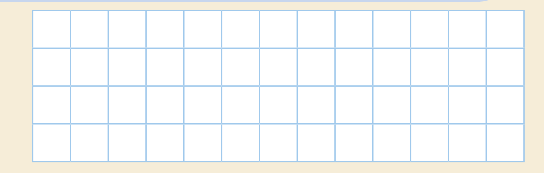




**4** **Dada** la recta R definida por la intersección de los dos planos

$$R: \begin{cases} 2x - y - 2z - 2 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

**escribe** su ecuación en forma paramétrica, siendo x, y, z $\in \mathbb{R}$.

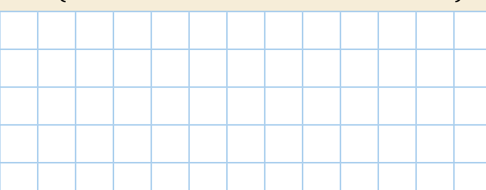


**5** Sea

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + 2z = 0 \right\}.$$

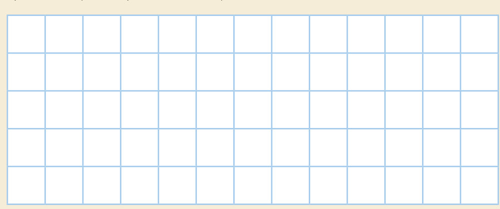
a) **Demuestra** que

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = x(5,1,0) + y(-2,0,1) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$



b) **Verifica** que

$(5,1,0),\ (-2,0,1) \in \Pi$.

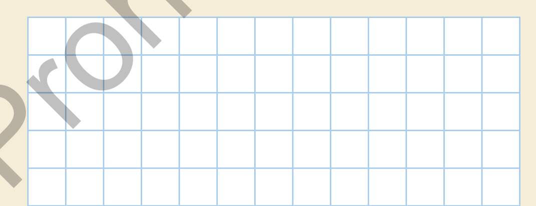


**6** **Determina** las ecuaciones paramétricas del plano.

a) $\Pi = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z - 1 = 0 \right\}.$



b) $\Pi = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 5z + 10 = 0 \right\}.$



**7** Sean $\Pi_1, \Pi_2$ los planos definidos como

$$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0 \right\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0 \right\}.$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2$$

a) **Prueba** que $\Pi_1 \cap \Pi_2$ es una recta.

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Si en el grupo de trabajo existe un alumno con discapacidad visual o cegara se debe utilizar las mismas palabras para comunicarnos con él como por ejemplo: "mirar", "ver", u "observar", ya que estas forman parte del vocabulario del alumno ciego, al igual que el resto de compañeros que si ven.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**8** ¿Cuál es la ecuación del plano que pasa por tres puntos de $\mathbb{R}^3$ no colineales y no nulos?

**9** A partir de la investigación anterior, **determinen** la ecuación cartesiana del plano que contiene los puntos:

a) $A = (2,\ 1,\ 3)$, $B = (-1,\ -1,\ -1)$, $C = (0,\ 3,\ 4)$

b) $A = (4,\ 5,\ 6)$, $B = (-1,\ 0,\ -1)$, $C = (3,\ -2,\ -2)$

**10** Dadas las siguientes ecuaciones cartesianas que representan planos, **determinen** sus intersecciones con los ejes coordenados. **Hallen** las ecuaciones del plano en forma paramétrica.

a) $4x - 5y + 2z - 7 = 0$.
b) $-6x - 5 + 2y - 3z + 6 = 0$.
c) $5x - 4y + 6z - 5 = 0$.
d) $3x + 6y + 8z - 3 = 0$.

**11** Sean $a = (2, 3, 5)$, $b = (0, 2, 1)$, $c = (-1, 1, -1)$. El plano $\Pi$ que pasa por $\vec{a}$ y está generado por los vectores $\vec{b}, \vec{c}$ es el conjunto definido como:

$$\Pi = \left\{ \vec{x} = (2,3,5) + u(0,2,1) + v(-1,1,-1) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Determinen** la ecuación de este plano.

DCCD: M.5.2.23. Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en $\mathbb{R}^3$.



**Saberes previos**

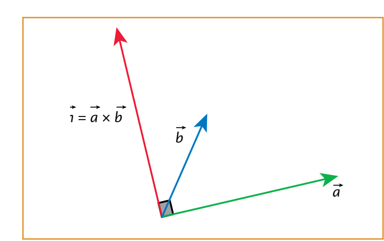
¿Cuáles son los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$?



**Desequilibrio cognitivo**

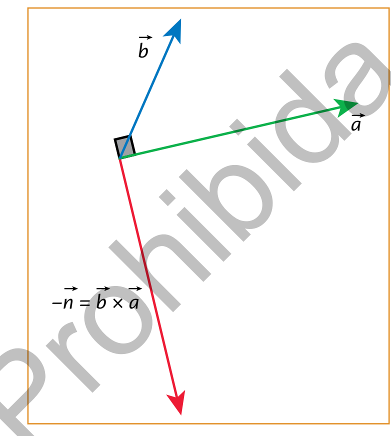
¿Cómo calculas un determinando de orden dos?

En la Figura 2.8. se muestran los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y el vector $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.




▲ Figura 2.8.

En la Figura 2.9. se muestran los vectores $\vec{a},\vec{b}$ y el vector $-\vec{n}=\vec{b}\times\vec{a}$. Nota que el producto vectorial no es conmutativo.




▲ Figura 2.9.

**Glosario**

vectorial. Perteneciente o relativo a los vectores.

# Planos paralelos y perpendiculares

**Definición.** Sean $\vec{a}=(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{b}=(a_2, b_2, c_2)\in\mathbb{R}^3$. El producto vectorial de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ se designa con $\vec{a}\times\vec{b}$ y se define como

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k},$$

donde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ es la base conónica de $\mathbb{R}^3$.

Se designa con $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}\in\mathbb{R}^3$.

El producto vectorial es tal que $\begin{cases} \vec{a}\perp\vec{N}, \\ \vec{b}\perp\vec{N}. \end{cases}$

Adicionalmente, $\vec{a}\perp\vec{b}$ si y solo si $\|\vec{n}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$.

*Ejercicios resueltos*

1. Sean $\vec{A}=(2,1,-1), \vec{B}=(-3,0,2)$. Entonces,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}=(2,-1,3).$$

2. Si $\vec{A}=(2,1,-1)$ y $\vec{B}$ es colineal con $\vec{A}$, esto es $\vec{B}=(2\alpha,\alpha,-\alpha)$ $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$. Entonces,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2\alpha & -\alpha \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2\alpha & \alpha \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-\alpha+\alpha)\vec{i}-(-2\alpha+2\alpha)\vec{j}+(2\alpha-2\alpha)\vec{k}=(0,0,0).$$

3. Si $\vec{A}=(5,3,0)$, $\vec{B}=(2,7,0)$, entonces

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\vec{k}=0\vec{i}-0\vec{j}+29\vec{k}=(0,0,29).$$

4. Sean $\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(0,2,1)$, $\vec{c}=(-1,1,2)$. Entonces

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}=(0,-1,2),$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=(2,-1,2).$$

Luego, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}=(0,-2,-1),$

$$(\vec{a}\times v)\times\vec{c}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=(-4,-2,-1).$$

Claramente, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. Este ejemplo muestra que el producto vectorial no es asociativo.

Al plano $\Pi$ podemos expresarlo en términos del producto escalar y del producto vectorial.

## Planos perpendiculares

**Definición.** Sean $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_2 \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{b}_1, \vec{c}_1$ no nulos y no colineales, $\vec{b}_2, \vec{c}_2$ no nulos y no colineales, $\vec{n}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{c}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{b}_2 \times \vec{c}_2$, se dice que los planos

$$\Pi_1 = \left\{\vec{x} = \vec{a}_1 + u\vec{b}_1 + v\vec{c}_1 \,|\, u,v \in \mathbb{R}\right\}, \Pi_2 = \left\{\vec{x} = \vec{a}_2 + x\vec{b}_2 + y\vec{c}_2 \,|\, x,y \in \mathbb{R}\right\}$$

son perpendiculares si y solo si el vector normal $\vec{n}_1$ del plano $\Pi_1$ es ortogonal al vector normal $\vec{n}_2$ de $\Pi_2$. Esto es, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. En tal caso, se escribe $\Pi_1 \perp \Pi_2$, que se lee "el plano $\Pi_1$ es ortogonal al plano $\Pi_2$.

## Planos paralelos

**Definición.** Sean $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_2 \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{b}_1, \vec{c}_1$ no nulos y no colineales, $\vec{b}_2, \vec{c}_2$ no nulos y no colineales, $\vec{n}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{c}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{b}_2 \times \vec{c}_2$, se dice que los planos

$$\Pi_1 = \left\{\vec{x} = \vec{a}_1 + u\vec{b}_1 + v\vec{c}_1 \,|\, u,v \in \mathbb{R}\right\}, \Pi_2 = \left\{\vec{x} = \vec{a}_2 + x\vec{b}_2 + y\vec{c}_2 \,|\, x,y \in \mathbb{R}\right\}$$

son paralelos si y solo si existe $c \neq 0$, tal que $\vec{n}_2 = c\vec{n}_1$, es decir, $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son colineales. En tal caso, se escribe $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, que se lee "el plano $\Pi_1$ es paralelo al plano $\Pi_2$.

*Ejercicios resueltos*

1. Consideremos los planos

$$\Pi_1 = \left\{\vec{x} = (0,\ 0,\ 8) + u(1,\ 0,\ -2) + v(0,\ 1,\ 1) \,|\, u,\ v \in \mathbb{R}\right\},$$
$$\Pi_2 = \left\{\vec{x} = (0,\ -8,\ 0) + r(1,\ 2,\ 0) + s(0,\ -1,\ -1) \,|\, r,\ s \in \mathbb{R}\right\}.$$

Probemos que los planos son paralelos. Calculamos los vectores normales:

$$\vec{n}_1 = (1,0,-2)\times(0,1,1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (2,-1,1),$$

$$\vec{n}_2 = (1,2,0)\times(0,-1,-1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-2,1,-1).$$

Se tiene $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, luego, $\Pi_1 \parallel \Pi_2$. Más aún, $\Pi_1 = \Pi_2 = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + z = 8\}$, que se deja como ejercicio.

2. Consideremos los planos

$$\Pi_1 = \left\{\vec{x} = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y + z = 2\right\},$$
$$\Pi_2 = \left\{\vec{x} = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + 2z = 2\right\}.$$

Probemos que estos planos son ortogonales o perpendiculares. Para ello, se obtienen los vectores normales y se calcula el producto escalar:

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 1), \vec{n}_2 = (-1, 0, 2),$$
$$\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 = (2, -1, 1) \cdot (-1, 0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0,$$

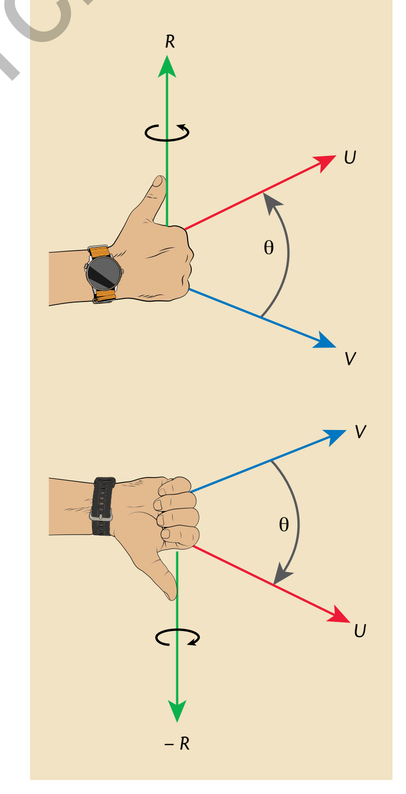
que muestra que $\vec{n}_2$ es ortogonal a $\vec{n}_1$. Luego, $\Pi_1 \perp \Pi_2$.



### Interdisciplinariedad

**Matemática y física**

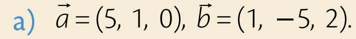
El producto vectorial, denominado también producto cruz, tiene muchas aplicaciones en la física, particularmente en situaciones prácticas de nuestra vida diaria. Si posicionas los dedos de la mano derecha con el vector $\vec{a}$ y rotas hacia el vector $\vec{v}$, el dedo pulgar mostrará la dirección y sentido del vector normal $\vec{n}$. A esto se le conoce como regla de la mano derecha. ¿Cómo saber el giro que debe realizarse para abrir la llave de agua o para sacar un tornillo? Simple. Aplica la regla de la mano derecha.



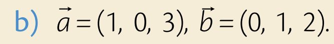
# Taller práctico

DCCD: M.5.2.23. Determinar si dos planos son paralelos (cuando no hay solución) o perpendiculares (si los vectores normales a los planos son perpendiculares) para resolver aplicaciones geométricas en $\mathbb{R}^3$.

**1** En cada ítem se dan dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ de $\mathbb{R}^3$. **Calcula** $\vec{a} \times \vec{b}$. **Verifica** que $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$.

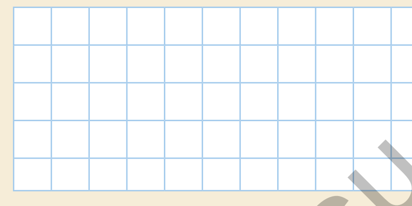

a) $\vec{a} = (5,\ 1,\ 0)$, $\vec{b} = (1,\ -5,\ 2)$.



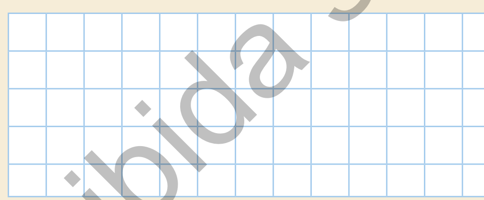

b) $\vec{a} = (1,\ 0,\ 3)$, $\vec{b} = (0,\ 1,\ 2)$.



c) $\vec{a} = (10,\ 1,\ -1)$, $\vec{b} = (1,\ 0,\ 20)$.



d) $\vec{a} = (10,\ 10,\ 3)$, $\vec{b} = (-10,\ 1,\ 30)$.




**2** **Considera** los planos

$$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = \left(\frac{5}{2}, 0, 0\right) + u\left(-\frac{5}{2}, 1, 0\right) + v(-4, 0, 1) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\},$$

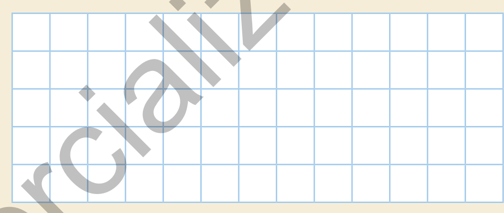
$$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (0, 0, 10) + r(8, 0, -2) + s(0, 8, -5) \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) **Demuestra** que $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 5y + 8z = 5 \right\}$.

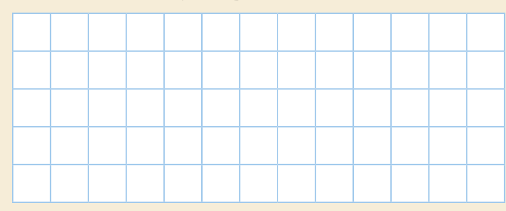
b) **Prueba** que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, y que $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$.

**3** Sea $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 4 \right\}$.

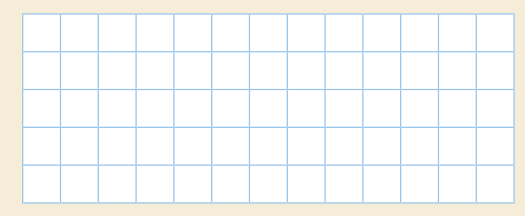
a) **Demuestra** que $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (4, 0, 0) + x(-1, 1, 0) + y(2, 0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

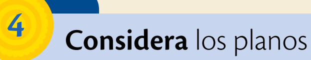


b) Sea $\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}$. **Prueba** que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.



c) **Verifica** que $\vec{n} = (5,\ 1,\ 0) \times (-2,\ 0,\ 1) = (1,\ -5,\ 2)$.

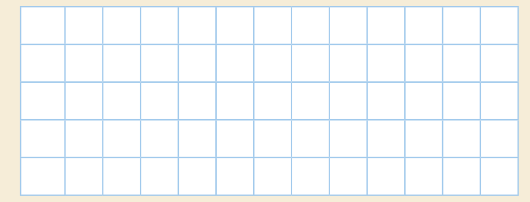



**4** **Considera** los planos

$$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 4 \right\},$$

$$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = -2 \right\}.$$

a) **Demuestra** que $\Pi_1 \perp \Pi_2$.

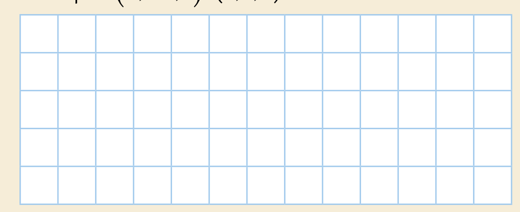


b) **Prueba** que

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (-6,10,0) + u(4,-5,1) \mid u \in \mathbb{R} \right\} = R$

y que $R \perp \Pi_1$.

Nota que $(4,-5,1) \cdot (1,1,1) = 0$.



**5** Sean

$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + 2z = -10 \right\}$

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + 2z = 10 \right\}$.

**Prueba** que $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.



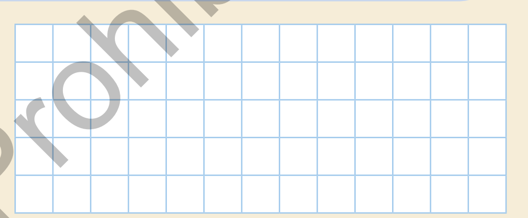
**6** Sean $\Pi_1, \Pi_2$ los planos definidos como

$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - 5y + 2z = 0 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1 \right\}$.

**Prueba** o **refuta** que

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \vec{x} = w(8,5,4) + \left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) \mid w \in \mathbb{R} \right\}$.



**7** **Resuelve** en tu cuaderno.
**Determina** la posición relativa de los dos planos:

a) $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 4z = 1 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y - 2x - 3z = 2 \right\}$.

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

En el caso de que un estudiante tenga poca visión es importante que se siente adelante y de preferencia frente a la pizarra y en un lugar bien iluminado.

**Indaguen** y **resuelvan**.

**8** **Consideren** los planos definidos como

$\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}$.

a) **Demuestren** que $\Pi_1 \perp \Pi_2$.

b) **Prueben** que

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \left\{ \vec{x} = a(1,2,-5) \mid a \in \mathbb{R} \right\} = R$

y que $R \perp \Pi_1$, $R \perp \Pi_2$.

**9** Sean $\vec{a} = (5,-2,3)$, $\vec{b} = (-3,0,5)$.

a) **Prueben** que $\vec{a} \perp \vec{b}$. Para ello, **calculen** el producto escalar de estos dos vectores.

**10** **Determinen** la posición relativa de los planos:

a) $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 2 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - 5z = 8 \right\}$.

b) $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 1 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -6x + 4y - 8z = -2 \right\}$.

c) $\Pi_1 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 1 \right\}$,

$\Pi_2 = \left\{ \vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -6x + 4y - 8z = 0 \right\}$.

# Solución de problemas cotidianos

## Modelo matemático de población de depredadores



Shutterstock, (2020). 457728049

▲ Gran oso pardo.

**1.** En un bosque, un depredador se alimenta de su presa. Para las primeras 15 semanas, a partir del fin de la temporada de caza, la población de depredadores es una función $f$ de $t$, el número de presas en el bosque, la cual, a su vez, es una función $g$ de $t$, el número de semanas que han pasado desde el fin de la temporada de caza. Si

$$f(x)=\frac{1}{48}x^2-2x+50;\quad g(t)=4t+52,$$

donde $0 \le t \le 15$, haz lo siguiente:

a) **Encuentra** un modelo matemático que exprese la población de depredadores como una función del número de semanas a partir del fin de la temporada de caza.

b) **Determina** la población de depredadores 11 semanas después del cierre de la temporada de caza.

### 1. Análisis de datos

a) La población de depredadores, $t$ semanas después del cierre de la temporada de caza, está dada por: $(f \circ g)(t)$, donde $0 \le t \le 15$.

**Modeliza**

$$(f\circ g)(t)=f(g(t)),$$

$$(f\circ g)(t)=f(4t+52),$$

$$(f\circ g)(t)=\frac{1}{48}(4t+52)^2-2(4t+52)+50.$$

La última expresión es el modelo matemático que expresa la población de depredadores.

b) La población de depredadores 11 semanas después del cierre de temporada es:

Once semanas después del cierre de la temporada de caza, la población de depredadores es 50. (Leithold, 1998)

**[ Practica en tu cuaderno ]**

**2.** Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de precios para los grupos que deseen alquilar autobuses: a los grupos que contengan un máximo de 40 personas se les cobrará una suma fija de $ 240 (4 veces $ 60). En grupos que contengan entre 40 y 80 personas, cada una pagará $ 60, menos 50 centavos por cada persona que pase de los 40. La tarifa más baja de la compañía, de $ 40 por persona, se ofrecerá a grupos que contengan 80 miembros o más. Expresa los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.

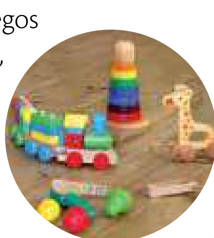


▲ Autobús turístico

Shutterstock, (2020). 528045364

Adaptado de: http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/4-funciones-modelos-jl.pdf

**3.** Una empresa que fabrica juegos hechos en madera para niños, ha estimado sus ingresos mensuales en dólares, que se pueden representar por la función $I(x) = -4{,}2x^2 + 540x$, mientras que sus gastos (también mensuales y en dólares) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 6{,}6x^2 + 180x + 1\,050$. En ambas funciones x representa la cantidad de juguetes producidas o vendidas.



▲ Juegos infantiles

Shutterstock, (2020). 633281795

a) **Representa** graficamente las funciones $I(x)$ y $G(x)$ en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

b) A partir del gráfico, **estima** el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa mensualmente para que sus ingresos superen los gastos.

c) Si definimos el beneficio de la empresa como la diferencia entre los ingresos y gastos, es decir, $I(x) - G(x)$, **escribe** la expresión del beneficio y **grafícala**.

d) ¿Cuál es el máximo beneficio que podría obtener la empresa?

e) ¿Qué nivel de producción de juguetes implicaría gastos extras, de tal modo que produciría beneficio negativo?

Tomado de: http://www.frcu.utn.edu.ar/archivos/material_ingreso/Unidad_3_matematica.pdf

## Desafíos científicos

# La matemática y el control de tráfico aéreo

¿Qué tiene que ver la matemática con el control de tráfico aéreo? En realidad, mucho. El control de tráfico aéreo se realiza, por lo general, desde tierra, desde donde se dirigen las operaciones de las aeronaves para que se mantenga cierta distancia lateral, vertical y longitudinal entre aviones y evitar así que se aproximen demasiado y colisionen. Entre otras actividades, este control permite un flujo de tráfico ordenado y proporciona información a los pilotos, incluyendo condiciones meteorológicas, información de navegación y avisos NOTAM, que son avisos que alertan al piloto de cualquier clase de peligro en la ruta elegida.

La navegación aérea es el arte de trasladar una aeronave desde un punto a otro en un curso deseado, conociendo en todo momento su posición. Sus funciones principales son la localización de posición, la determinación de la dirección, la medición de distancias y el cálculo de los tiempos.

Adaptado de: http://es.slideshare.net/fedecohen7/navegacin-aerea


Shutterstock, (2020). 443018776

▲ Torre de control de tráfico aéreo.

## La matemática y las profesiones

# Gestión de Tránsito Aéreo

Las personas que trabajan en el control del tráfico aéreo son aquellas que vigilan todos los movimientos del avión y verifican que estos lleguen a tierra sin ningún contratiempo. Mantienen contacto visual y por radar para las operaciones de aterrizaje y despegue, y deben manejar y tener un razonamiento lógico en $\mathbb{R}^3$.

Para optar por la carrera de tecnólogo en gestión de tránsito aéreo, debes analizar si tienes las siguientes competencias:

- Un gran interés por la aviación.
- La capacidad de pensar en 3D.
- Una gran capacidad de concentración.
- La capacidad de mantener la calma bajo presión.
- Habilidades en lo que respecta a las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).
- La capacidad de tomar decisiones rápidas, en situaciones de emergencia, así como la capacidad de dar instrucciones precisas y aceptar responsabilidades.
- Dominio del idioma Inglés.

Los profesionales graduados de esta profesión pueden desarrollar sus actividades en los aeropuertos nacionales e internacionales.

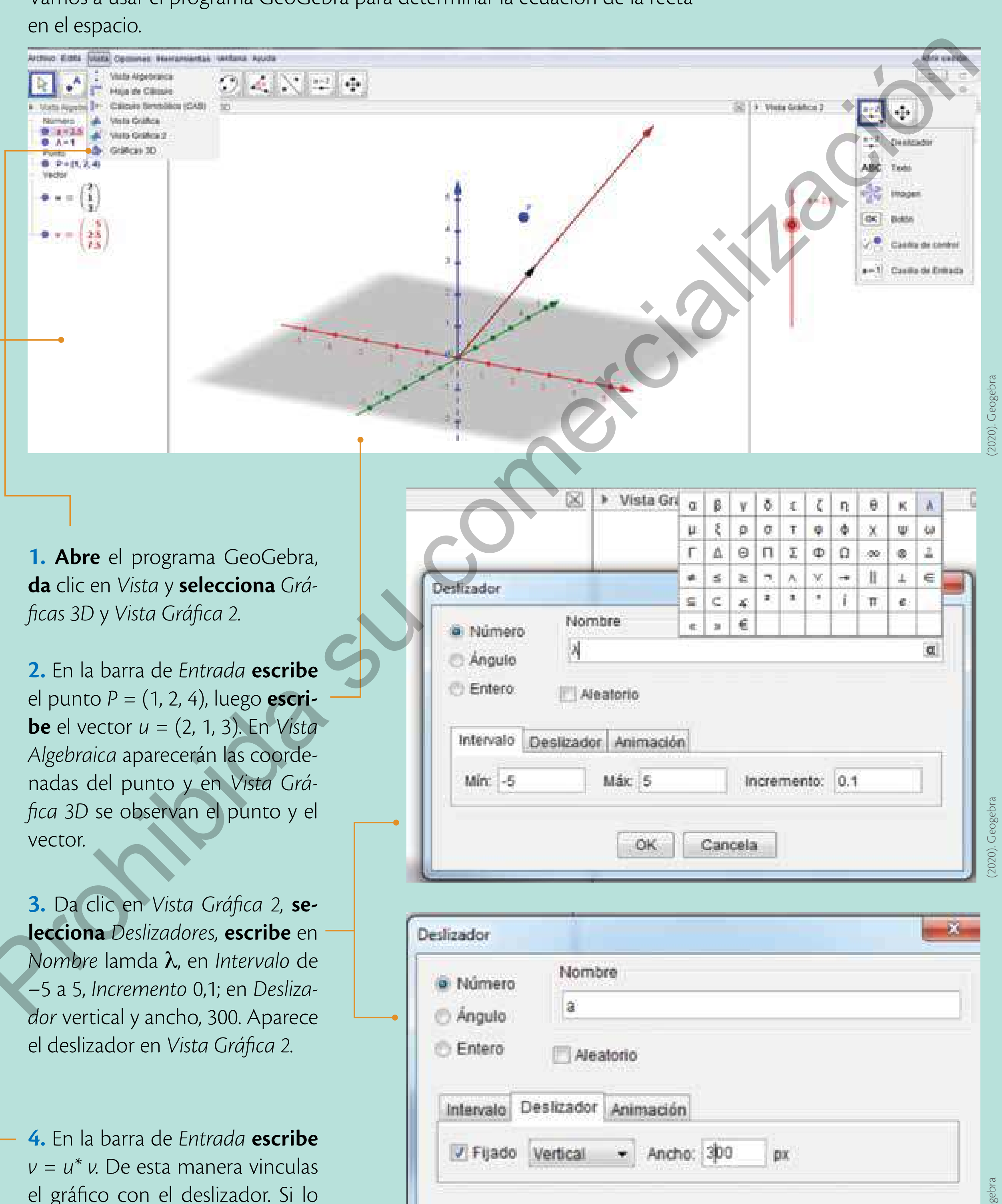
http://www.educaweb.com/profesion/controlador-trafico-aereo-9/


Shutterstock, (2020). 116515978

▲ Controlador aéreo.

# Ecuación de la recta $\mathbb{R}^3$, en dados un punto y un vector director

Vamos a usar el programa GeoGebra para determinar la ecuación de la recta en el espacio.




(2020). Geogebra

(2020). Geogebra

(2020). Geogebra

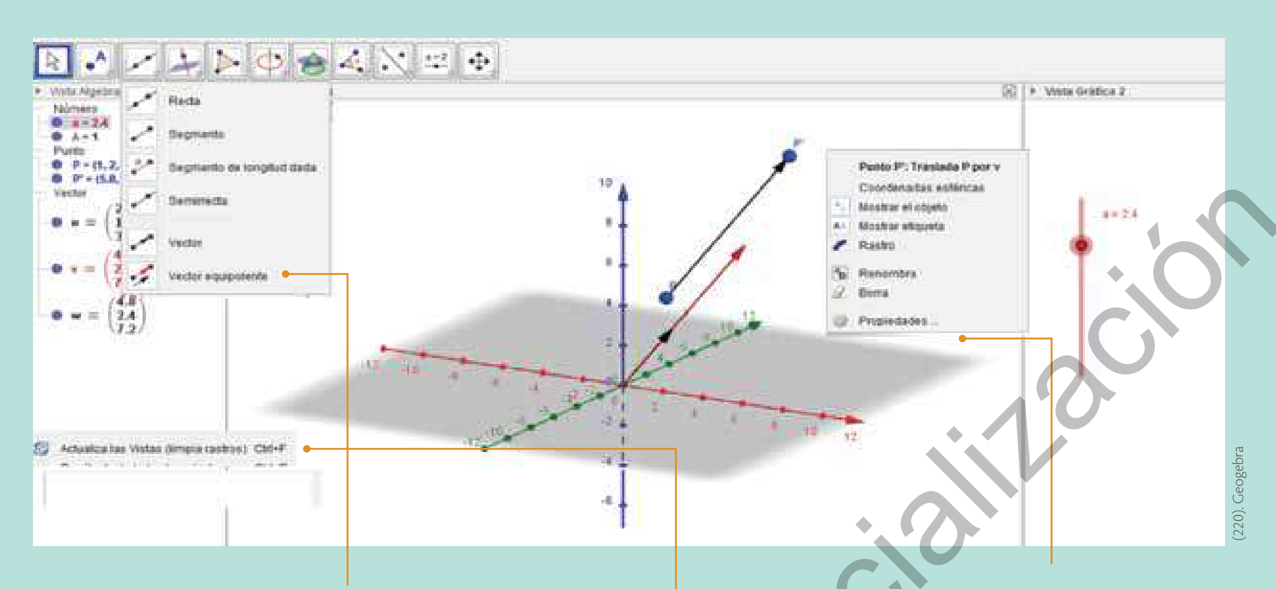
**1. Abre** el programa GeoGebra, **da** clic en *Vista* y **selecciona** *Gráficas 3D* y *Vista Gráfica 2.*

**2.** En la barra de *Entrada* **escribe** el punto $P$ = (1, 2, 4), luego **escribe** el vector $u$ = (2, 1, 3). En *Vista Algebraica* aparecerán las coordenadas del punto y en *Vista Gráfica 3D* se observan el punto y el vector.

**3.** Da clic en *Vista Gráfica 2,* **selecciona** *Deslizadores,* **escribe** en *Nombre* lamda **λ**, en *Intervalo* de –5 a 5, *Incremento* 0,1; en *Deslizador* vertical y ancho, 300. Aparece el deslizador en *Vista Gráfica 2.*

**4.** En la barra de *Entrada* **escribe** $v = u^* v$. De esta manera vinculas el gráfico con el deslizador. Si lo mueves a este, puedes observar los cambios en el vector.

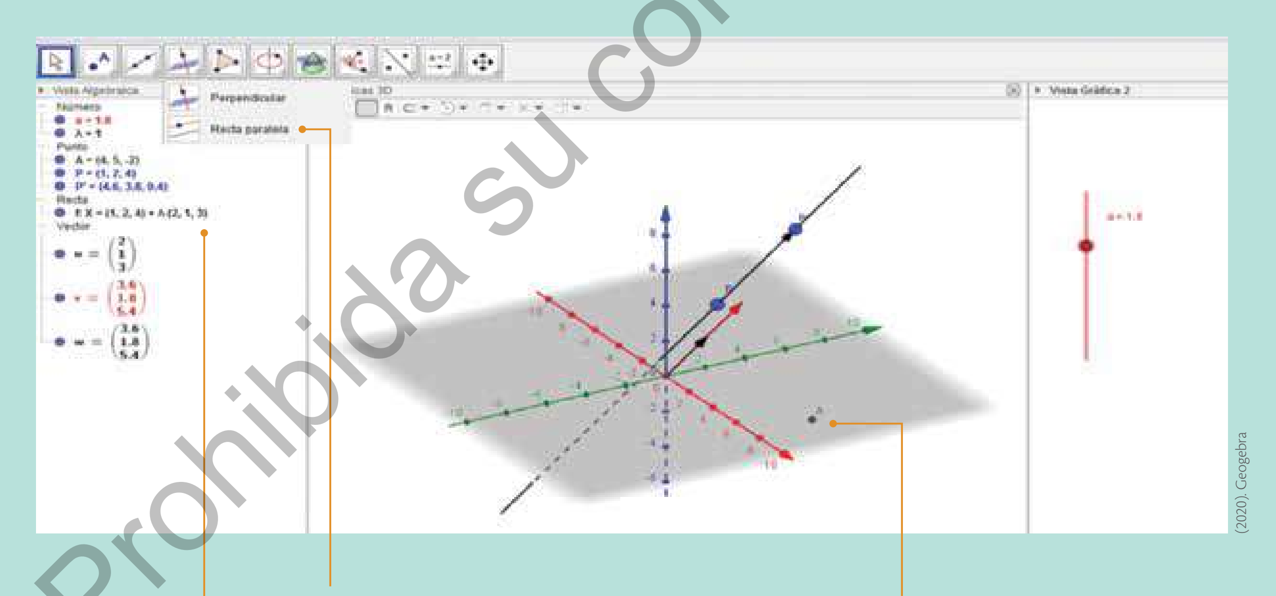
Vamos a construir el vector equipolente a $v$ y que pase por $P$.



(220). Geogebra

**5.** Con la herramienta *Vector equipolente*, **da** clic sobre el vector $v$ y el punto $P$. Aparecerá el vector equipolente.

**6. Activa** Rastro para el punto $P'$, **mueve** el deslizador y **observa** las diferentes posiciones del punto. Para desactivar el rastro en *Vista*, **da** clic en *Actualiza las Vistas* y *Limpiar rastro*.



(2020). Geogebra

**7. Selecciona** *Recta paralela*, **da** clic sobre el vector $u$ y el punto $P$. En *Vista Gráfica 3D* aparece la recta y en *Vista Algebraica* aparece la ecuación de la recta en la forma

$\vec{x} = P + \lambda \vec{u}$, que corresponde a:

$$\vec{x} = (1,2,4) + \lambda(2,1,3).$$

**8. Verifica** si el punto $A = (4, 5, -2)$ corresponde a la recta. En el gráfico se aprecia que no es parte de esta recta.

**Practica** esta actividad cambiando el vector y el punto.

Adaptado de: https://www.youtube.com/watch?v=NTAIau7FGyc

## Glosario

equipolente. Dicho de un vector: Que es paralelo a otro y de igual magnitud y sentido.

rastro. Señal, huella que queda de algo.

# Desafíos y proyectos matemáticos

## Tema: Construcción de cajas

### Recursos

- Materiales de papelería: cartulina, goma.
- Materiales tecnológicos: calculadora, *tablet*, celular, computadora con la aplicación GeoGebra instalada, Internet.



▲ Cajas de cartón.

Shutterstock, (2020). 248759344

### Justificación

La industria, en forma general y, de manera particular, la industria de electrodomésticos, debe diseñar cajas para empacar los artefactos eléctricos. En cursos anteriores, los estudiantes han efectuado construcciones con moldes de cubos y de paralelepípedos. En esta unidad se construirán cajas de acuerdo con los requerimientos dados por el departamento de *marketing* de una empresa.

### Objetivos

Construir dos modelos de cajas con igual volumen, una de ellas debe ser un cubo y la otra un paralelepípedo. Determinar las medidas exactas para cumplir con este requerimiento sobre la base de un modelo matemático.

### Actividades

- Formen equipos de dos o tres estudiantes y elijan un coordinador.
- Analicen la situación problemática: se trata de satisfacer las necesidades de un cliente que desea que se confeccionen cajas con volúmenes iguales. Una de ellas debe ser un cubo y la otra, un prisma cuyo ancho sea igual al del cubo, su profundidad sea el doble y su altura, 4 cm menor.
- Elaboren y completen la tabla siguiente, que les permitirá organizar y modelizar la función del volumen de la caja.

| Modelo | | Ancho | Profundidad | Altura | Volumen |
|---|---|---|---|---|---|
| Cubo | | $x$ | $x$ | $x$ | |
| Prisma | | $x$ | | | |

- Por las condiciones de la situación, pueden igualar los volúmenes y obtener el modelo de la función polinómica buscada.
- Utilicen un *software* para graficar la función encontrada, por ejemplo, puede ser GeoGebra.
- Observen los puntos donde la función que graficaron corta al eje de las x. Este valor representa la longitud x que debe tener el cubo. Con este dato ya pueden determinar las dimensiones del paralelepípedo.
- Construyan con cartulina los dos sólidos geométricos con las dimensiones encontradas y verifiquen si cabe el mismo volumen en las dos cajas.
- Establezcan el costo de cada caja.

### Conclusiones

Solicíteles a los estudiantes que expresen cómo se sintieron al realizar esta actividad y si en realidad encontraron una aplicación práctica de las funciones en situaciones de la vida real.

# En síntesis




▲ Mercado artesanal.

▲ Monumento a los Héroes del 10 de agosto de 1809. Quito.

# Evaluación sumativa

**[Heteroevaluación]**

M.5.1.63. Realizar las operaciones de suma y multiplicación de funciones escalonadas y de multiplicación de números reales por funciones escalonadas aplicando las propiedades de los números reales.

**1** **Considera** las funciones reales $f$, $g$, $h$, definidas en el intervalo $[0,\infty)$ como

$f(x)=-x+1,\quad g(x)=-\dfrac{1}{1+x},$

$h(x)=x-1,\ x\in\mathbb{R}$. **Calcula:**

a) $(-f+g-h)(0)$.

b) **Define** las funciones reales $f+g-h$, $-f+g-h$, $-(-f-g-h)$ y **compara** con la función $f+g+h$.

**2** Sea $h$ la función real definida en $[0,\infty)$ como sigue:

$$h(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } 0\leq x<1,\\ 1-\dfrac{1}{x}, & \text{si } 1\leq x.\end{cases}$$

a) **Calcula** $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$.

b) **Prueba** que la función $h$ es estrictamente decreciente sobre $[0,1[$, y estrictamente creciente sobre $[1,\infty)$.

c) **Define** la función $-h$ y **traza** las gráficas de las funciones $h$ y $-h$.

d) **Prueba** que $h$ no es inyectiva.

I.M.5.7.1. Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; halla mediante tres puntos dicha ecuación o a partir de la intersección de dos planos, y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (I.2.)

**3** **Determina** si los siguientes planos son paralelos: $P=(x,y,z)$.

a) $\Pi_1=\{(1,-2,0)+\lambda(1,2,1)+t(2,3,4)\,|\,\lambda,t\in\mathbb{R}\}$,
$\Pi_2=\{(2,4,1)+\beta(3,5,5)+v(1,1,3)\,|\,\beta,v\in\mathbb{R}\}$.

b) $\Pi_1=\{(3,2,1)+\lambda(1,0,0)+t(0,1,0)\,|\,\lambda,t\in\mathbb{R}\}$,
$\Pi_2=\{(1,1,1)+\beta(1,0,0)+v(0,0|)\,|\,\beta,v\in\mathbb{R}\}$.

**4** **Encuentra** las ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesiana del plano que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y por los puntos $B=(-2,-1,0)$ y $C=(3,3,4)$.

**5** **Considera** los planos

$\Pi_1=\{\vec{x}=(1,2,3)+u(1,1,-2)+v(0,1,1)\,|\,u,v\in\mathbb{R}\}$,

$\Pi_2=\{\vec{x}=(1,-2,4)+r(1,2,0)+s(0,1,1)\,|\,r,s\in\mathbb{R}\}$.

a) **Determina** la posición relativa entre los dos planos.

b) En caso de que los planos se corten, **determina** la ecuación de la recta intersección de los dos planos.

**6** Sean , $\Pi_1$, $\Pi_2$ los planos definidos como

$\Pi_1=\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x-3y=0\}$,

$\Pi_2=\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x+2y-z=0\}$.

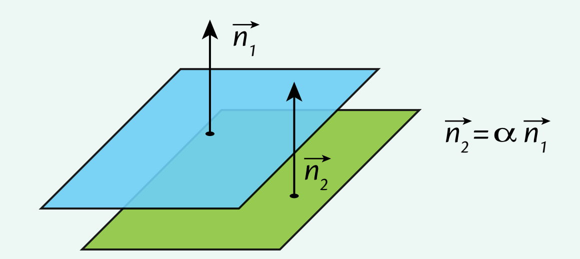
**Prueba** que $\Pi_1\cap\Pi_2$ es una recta.

**7** Las ecuaciones paramétricas de una recta $R$ están definidas como

$$\begin{cases}x=3-2t,\\ y=5-3t, & \forall t\in\mathbb{R}.\\ z=4+2t,\end{cases}$$

**Obtén** la ecuación vectorial de la recta $R$.

**8** **Escribe** la posición relativa que existe entre los planos de las figuras.



**Resuelve** cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

**9** Sean las funciones reales definidas como $f(x) = 4x$ y $h(x) = \sqrt{x+1}$, el conjunto dominio que se obtiene al efectuar $(f - g)(x)$ es:

a) $x \geq 1$.
b) $x \geq -1$.

**10** Al determinar $(g \circ f)(x)$ para las funciones $f(x) = 3x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$, se obtiene como resultado:

a) $(g \circ f)(x) = 3x^2 + 3$.
b) $(g \circ f)(x) = 3x + 3 + x^2 - 1$.
c) $(g \circ f)(x) = (3x + 3)^2 - 1$.
d) $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 3$.

**11** Dado el punto $P = (-2, 3, 4)$ y $\vec{u} = (3, -1, 2)$ paralelo a la recta $l$ que pasa por $P$, ¿cuál es la ecuación vectorial?

a) $(x, y, z) = (-2+3\lambda, 3-\lambda, 4+2\lambda)$.
b) $(x, y, z) = (2+3\lambda, -3-\lambda, 4+2\lambda)$.
c) $(x, y, z) = (1+3\lambda, 3-\lambda, -4+2\lambda)$.
d) $(x, y, z) = (1+3\lambda, 2-\lambda, 3+2\lambda)$.

**12** Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A = (-1, 2, 3)$ y $B = (2, 2, 5)$ son:

a) $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 4 \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

**13** **Determina** la ecuación cartesiana del plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, -1, 2)$, $C = (5, -1, 1)$.

a) $x - 2y + z - 2 = 0$.
b) $x + 7y + 3z - 1 = 0$.
c) $2x + 3y - 5z - 1 = 0$.
d) $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

**[Autoevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Realizo con precisión operaciones con funciones. | | | |
| Determino el valor de una función en un punto específico. | | | |
| Identifico planos paralelos. | | | |
| Determino fácilmente las ecuaciones vectorial, paramétrica y cartesiana de un plano. | | | |

**[Coevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Nos gusta trabajar en equipo porque aprendemos de los demás. | | | |
| Al trabajar en equipo nos conocemos mejor y trabajamos entre todos. | | | |

**[Metacognición]**

a) ¿Qué es lo que más recuerdas de los planos en el espacio?

b) ¿En crees que se aplica los vectores en el espacio en la vida real?

# Sucesiones reales convergentes y distribuciones de probabilidad

## Aplicaciones de distribuciones de probabilidad

Aristóteles dijo: "La probabilidad es lo que suele ocurrir". No se puede predecir el futuro, pero se puede utilizar la probabilidad matemática para determinar qué tan probable es que algo pueda o no suceder. Así, de manera inconsciente, el ser humano utiliza la probabilidad en varias facetas de su vida. Por ejemplo en el deporte, siempre hay la probabilidad de que tu equipo gane o pierda el partido. Igual sucede en los juegos de mesa, donde está presente la probabilidad de ganar o perder, e incluso en el campo de la medicina, cuando el médico determina que el enfermo necesita una cirugía, y el paciente quiere conocer el grado de éxito de la operación. La probabilidad también está presente en las primas de seguros de autos: antes de otorgar un tipo de seguro, analizan si eres un conductor responsable o no, y luego determinan la prima. Asimismo en el estado del tiempo, los meteorólogos realizan predicciones sobre la base de datos y patrones de años anteriores.

Adaptado de: https://prezi.com/jbrsljdnmaxw/aplicaciones-de-la-estadistica-y-la-probabilidad-en-la-vida/



### Observa y contesta

- ¿En qué aspectos de tu vida utilizas la probabilidad?
- ¿Crees qué se puede predecir el número de llamadas que tiene el Ecu 911 en un minuto? ¿Por qué?
- ¿Puedes predecir el número de mensajes que tendrás durante dos horas en tu celular?
- ¿Qué otro evento puedes predecir? Menciónalo.




Shutterstock, (2020). 536250937

Shutterstock, (2020). 76475956

# 3 unidad



**Bloques curriculares**

Álgebra y funciones

Estadística y probabilidad



## Objetivos

- O.M.5.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental y escrito, exacto o estimado; y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.
- O.M.5.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.
- O.M.5.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Ministerio de Educación, (2016).

DCDD: M.5.1.59. Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales.
M.5.1.60. Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.
M.5.1.76. Reconocer sucesiones numéricas reales que convergen para determinar su límite.



**Saberes previos**

¿Qué es una sucesión?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Puede el límite de una sucesión ser infinito?

**Simbología matemática**

$n \to \infty$ se lee "$n$ tiende a infinito" o "$n$ es suficientemente grande".

$\infty$ es el símbolo infinito, no es un número real.

$n \in \mathbb{Z}^+$ es un número elemento de los enteros positivos.

**Glosario**

convergente. Serie en que la suma de sus términos se aproxima cada vez mas a una determinada cantidad; p. ej., 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16…, se acerca progresivamente a valer 1, sin llegar nunca.

# Sucesiones convergentes. Límite de una sucesión

Antes de dar una definición formal de límite de una sucesión, se procede a dar una de tipo intuitivo que se propone en los ejemplos.

1. Se considera la sucesión numérica real $(u_n)$ definida como

$u_n = \dfrac{2}{n+5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se tienen las desigualdades siguientes:

$$0 \leq \cdots < u_{n+1} = \frac{2}{n+6} < u_n = \frac{2}{n+5} < \cdots < u_2 = \frac{2}{2+5} < u_1 = \frac{2}{1+5} < \frac{2}{5} = u_0,$$

es decir que para $n \in \mathbb{Z}^+$ cada vez más grande, los correspondientes valores que se obtienen de la sucesión se aproximan cada vez más a cero.

Por ejemplo, para $n_1 = 10^4$, se tiene $u_{n_1} = \dfrac{2}{10^4+5} < 0{,}000\ 2$,

para $n_2 = 10^{10}$, resulta $u_{n_2} = \dfrac{2}{10^{10}+5} < 0{,}0000000002$,

para $n_3 = 10^{10^{10}}$, $u_{n_3} = \dfrac{2}{10^{10^{10}}+5}$ es mucho más pequeño que $u_{n_2}$ y este, a su vez, es más pequeño que $u_{n_1}$. Esta situación se expresa como sigue: $u_n$ se aproxima a 0 conforme $n \to \infty$, o también $u_n$ converge a 0 conforme $n \to \infty$, que se escribe $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o también $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Esta última escritura se lee: "el límite de $u_n$ es 0 cuando $n$ tiene a $\infty$". Observa que en términos de la distancia de números reales $d(x,y) = |x-y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, la aproximación o convergencia de $u_n$ a 0 se compara con esta distancia y con un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, cuando $n \geq n_0$, siendo $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ lo que debe determinarse. Entonces,

$$d(u_n,0) = |u_n - 0| = |u_n| < \varepsilon \text{ cuando } n \geq n_0.$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = 10^{-2}$, la desigualdad $|u_n| = \dfrac{2}{n+5} < \dfrac{2}{n} < \varepsilon$ se verifica si se elige $n > \dfrac{2}{\varepsilon}$. En este caso, elegimos $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ que verifique esta desigualdad, por ejemplo, $n_0 = 201$ satisface la condición $\dfrac{2}{n_0} < \varepsilon$. Así, se tiene la implicación:

$$n > 201 \Rightarrow d(u_n,\ 0) = |u_n| < 10^{-2} = \varepsilon.$$

Decimos entonces que la sucesión $(u_n)$, definida como $u_n = \dfrac{2}{n+5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ converge a 0.

2. Consideremos la sucesión $(a_n)$ definida como

$$a_n = \frac{3n^2+n+5}{n^2+20}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Determinemos el límite de esta sucesión. Para $n \in \mathbb{Z}^+$ dividimos numerador y denominador por $n^2$, tenemos

$$a_n = \frac{3n^2+n+5}{n^2+20} = \frac{\dfrac{3n^2+n+5}{n_2}}{\dfrac{n^2+20}{n^2}} = \frac{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{20}{n^2}}.$$

Utilizando un argumento similar al del ejemplo precedente (1), se tiene

$$\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{5}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{20}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por lo tanto, $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, o también $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

Nota que

$$0 \le d(a_n,3) = |a_n - 3| = \left|\frac{3n^2+n+5}{n^2+20} - 3\right| = \left|\frac{n-55}{n^2+20}\right| = \frac{|n-55|}{n^2+20} < \frac{n+55}{n^2}.$$

Para $n > 55$ se tiene

$$0 \le d(a_n,3) = |a_n - 3| = \left|\frac{3n^2+n+5}{n^2+20} - 3\right| = \left|\frac{n-55}{n^2+20}\right| = \frac{|n-55|}{n^2+20} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

así, $0 \le d(a_n,3) < \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\quad d(a_n,3) = |a_n - 3| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Se denota con $S$ al conjunto de sucesiones reales definidas en $I \subseteq \mathbb{N}$.

**Definición.** Sea $(a_n) \in S$. Se dice que $(a_n)$ es convergente si y solo si existe $L \in \mathbb{R}$ que satisface la condición siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ con } n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Si $(a_n)$ es una sucesión que converge a $L$, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ que se lee "el límite de $a_n$ cuando $n$ tiende a infinito es igual a $L$"; diremos también $(a_n)$ tiende a $L$ cuando $n$ tiende a infinito, lo que escribimos $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$.

*Ejercicio resuelto*

1. La sucesión $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ es acotada, pues $\left|1-\frac{1}{n}\right| \le 1, \quad \forall n \in Z^+$.

   Nota que la cota superior de esta sucesión es 1. Además, converge a 1, esto es, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ o también $1-\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

2. La sucesión $(sen(n))$ es divergente. Esta es acotada; una cota superior es 1.



**Recuerda que...**

Existen dos clases de sucesiones reales: las convergentes y las divergentes.

**Definición.** Sea $(a_n) \in S$. Diremos que $(a_n)$ es divergente si ella no es convergente.

**Definición.** Sea $(a_n) \in S$. Se dice que $(a_n)$ es una sucesión de Cauchy si esta satisface la condición siguiente:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall m, n \in \mathbb{N}$, con $n, m \ge n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$.

**Definición.** Sea $(a_n) \in S$.

i. Se dice que $(a_n)$ es una sucesión acotada superiormente si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \le c, \forall n \in I$. El número real $c$ se llama cota superior de la sucesión $(a_n)$.
ii. Se dice que $(a_n)$ es una sucesión acotada inferiormente si y solo si existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $c \le a_n$, $\forall n \in I$. El número real $c$ se llama cota inferior de la sucesión $(a_n)$.
iii. Se dice que $(a_n)$ es una sucesión acotada, si esta es superior e inferiormente acotada. Es decir, existe $c>0$, tal que $|a_n| \le c$, $\forall n \in I$. El número real positivo $c$ se llama cota superior de la sucesión $(a_n)$.

**Glosario**

acotada. Delimitar cualquier otra cosa.
cota. Elemento superior o inferior a todos los de un determinado conjunto ordenado.
divergente. Serie en que la suma de sus términos tiende al infinito.



**Recuerda la definición**

Algunos resultados importantes de las sucesiones convergentes son:

1. Si $(a_n)$ es una sucesión convergente, su límite es único.
2. Toda sucesión convergente es acotada. El recíproco, en general, no es cierto. Por ejemplo, la sucesión $\left((-1)^n\right)$ es acotada, pero no es convergente.
3. Si $(a_n)$ es una sucesión convergente, tal que $a_n \geq 0, \quad \forall n \in I$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$. El límite de toda sucesión real no negativa es no negativo.
4. Toda sucesión $(a_n)$ creciente y acotada superiormente es convergente. Por ejemplo, la sucesión $\left(3-\frac{5}{n^2}\right)$ es creciente y acotada superiormente por 3, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n^2}\right)=3.$
5. Toda sucesión $(a_n)$ decreciente y acotada inferiormente es convergente. Por ejemplo, la sucesión $\left(\sqrt{7}+\frac{10}{n^3+n}\right)$ = es decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{7}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{7}+\frac{10}{n^3+n}\right)=\sqrt{7}.$

## Álgebra de sucesiones convergentes

Las operaciones con sucesiones convergentes se describen con los siguientes ejemplos.

1. Sea $(a_n)$ la sucesión definida como $a_n = 1-2^{-n}\ n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $(a_n)$ es creciente y acotada superiormente. En efecto, $n<n+1 \Rightarrow 2^{-(n+1)} < 2^{-n}$. Multiplicando por $-1$ a esta desigualdad y luego sumando 1 en ambos miembros, resulta

$$1-2^{-n} < 1-2^{-(n+1)} \Leftrightarrow a_n < a_{n+1},$$

o sea, la sucesión $(a_n)$ es creciente. Como $0<2^{-n}\leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, se sigue que $0 \leq 1-2^{-n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, que muestra que $(a_n)$ es acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1. Además $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$. Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-2^{-n}) = 1.$

Sean $(a_n), (b_n)$ las sucesiones reales definidas como

$$a_n = \frac{3n^2+10n}{n^2+5n+15},\ b_n = \frac{n^2+n+1}{10n^2+3n+5},\quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculemos $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$. En primer lugar, se tiene $a_n>0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

A continuación, si dividimos numerador y denominador por $n^2$, tenemos

$$a_n = \frac{3n^2+10n}{n^2+5n+15} = \frac{\frac{3n^2+10n}{n^2}}{\frac{n^2+5n+15}{n^2}} = \frac{3+\frac{10}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{15}{n^2}},\quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Por otro lado, tenemos los siguientes resultados: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0. \end{cases}$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\times 0 = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n} = 10\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{15}{n^2} = 15\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

Con estos argumentos, en el numerador y denominador de la sucesión $(a_n)$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{10}{n}\right)=3,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}+\frac{15}{n^2}\right)=1.$$

En consecuencia, todos estos resultados se expresan como

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{10}{n}}{1+\frac{5}{n}+\frac{15}{n^2}}\right) = \frac{3+10\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+15\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = 3.$$

Procediendo de manera muy similar a lo precedente, tenemos

$$b_n = \frac{n^2+n+1}{10n^2+3n+5} = \frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{10n^2+3n+5}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{10+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}, \quad n \in Z^+,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{10+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}\right) = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{10+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{10}.$$

Con todos estos argumentos,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 3+\frac{1}{10} = \frac{31}{10}.$$

## Propiedades básicas de los límites de sucesiones convergentes

1. Sean $(u_n)$, $(v_n)$ sucesiones convergentes. Entonces $(u_n \pm v_n)$ es convergente, y, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \pm v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

2. Sean $(u_n)$ una sucesión convergente y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la sucesión $(\lambda u_n)$ es convergente, y, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

3. Sean $(u_n)$, $(v_n)$ sucesiones convergentes, entonces la sucesión $(u_n v_n)$ es convergente, y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n x \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

4. Sean $(a_n)$, $(b_n)$ sucesiones convergentes. Si $b_n \neq 0$, $\forall n \in I$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ es convergente, y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

5. Sean $(a_n)$ una sucesión y $L \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |L|$. El recíproco, en general, no es cierto. Por ejemplo, la sucesión $(a_n)$ con $a_n = (-1)^n$ no es convergente, mientras que $|a_n| = 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con lo que la sucesión $(|a_n|)$ converge a 1.

*Ejercicio resuelto*

Estas propiedades básicas de límites de sucesiones convergentes se conocen como álgebra de sucesiones convergentes.

Sea $a_n = \frac{9n^2}{n^2+8n+25}$, $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión converge a 9. Pues

$$a_n = \frac{\frac{9n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{8n}{n^2}+\frac{25}{n^2}} = \frac{9}{1+\frac{8}{n}+\frac{25}{n^2}}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n} = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{25}{n^2} = 0$.

Por lo tanto $a_n$ converge a 9 cuando $n \to \infty$.



**Recuerda que...**

Sean $(a_n)$, $(b_n)$ sucesiones reales definidas en $I$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Supongamos que $(a_n)$, $(b_n)$ son convergentes a $x$, $e$, $y$.

Entonces,

i. Si $b_n \neq 0$, $\forall n \in I$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = y \neq 0$, $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ es convergente, y, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{y}$.

ii. Si $b_n \neq 0$, $\forall n \in I$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = y \neq 0$, la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ es convergente, y, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{x}{y}$.

**Glosario**

**sucesión convergente.** Sucesión que tiene límite.

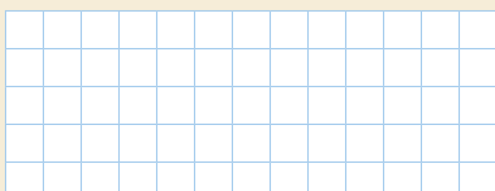
**sucesión divergente.** Sucesión que no tiene límite.

# Taller práctico

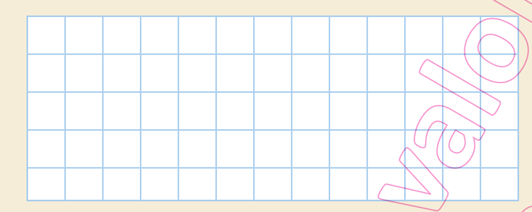
DCCD: M.5.1.59. Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales. M.5.1.60. Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.

**1** **Calcula** los términos $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ luego **determina** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para $a_n$, que se define en cada ítem.

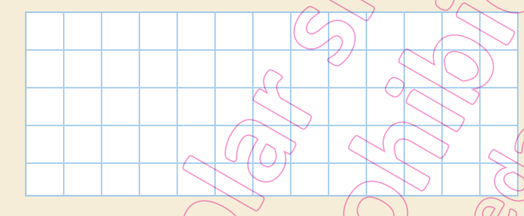
a) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.



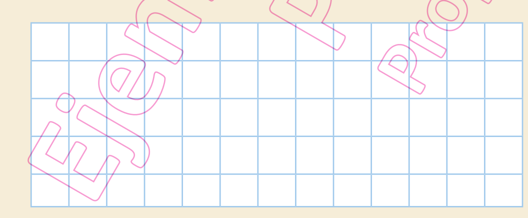
b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\left[\dfrac{\pi}{2}\left(1+(-1)^n\right)\right]$.



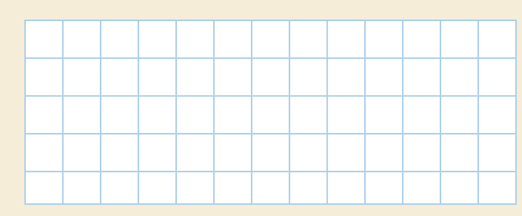
c) $a_n = 2^{\frac{1}{n}}$.



d) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$.

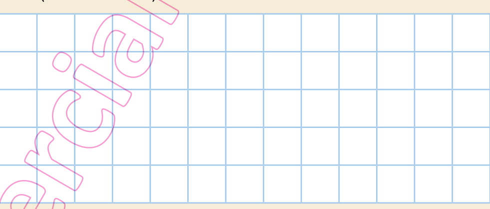


e) $a_n = \dfrac{n^3+10n-5}{4n^3+25n^2}$.

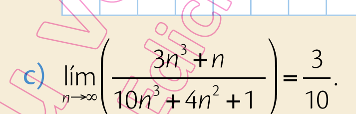


**2** **Demuestra** que el límite de la sucesión es el indicado.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=2$.



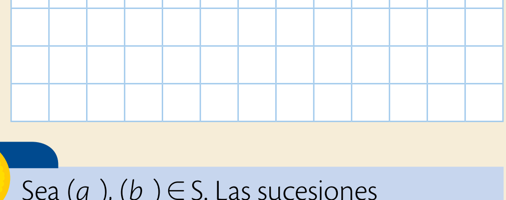
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{n}}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{n}}\right)=0$.



c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^3+n}{10n^3+4n^2+1}\right)=\dfrac{3}{10}$.



d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-3n+4}{-2n^2+1}\right)=\dfrac{-5}{2}$.



**3** Sea $(a_n), (b_n) \in S$. Las sucesiones que en cada ítem se dan. **Calcula** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ (siempre que exista).

a) $a_n = \dfrac{3n+5}{n+3}$, $b_n = -\dfrac{n+2}{2n+1}$.

b) $a_n = 1+\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

c) $a_n = 5-\dfrac{5}{\sqrt{n}}$, $b_n = \dfrac{8}{\sqrt{n}}-4$.

d) $a_n = 8+\dfrac{5n}{3n^2+8}$, $b_n = \dfrac{1}{3n^2+8}$.

**Indaguen** y **trabajen** en grupo.

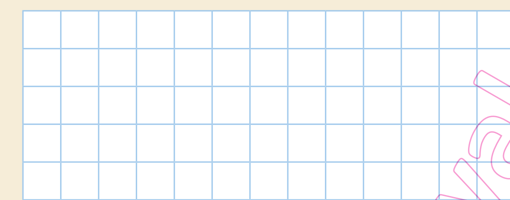


4 Sea $(a_n), (b_n) \in S$. **Propón** un ejemplo para cada literal.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, **comprueba** que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.



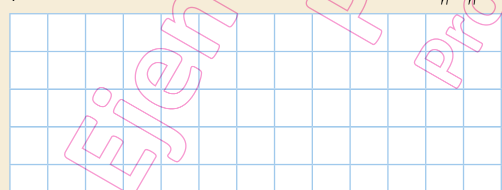
b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = L \neq 0$, **comprueba** que $(a_n)$ no es acotada.



c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $(b_n)$ es acotada, **comprueba** que $(a_n b_n)$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.



d) Si $(a_n)$ es acotada y $(b_n)$ es divergente, ¿qué puede decirse acerca de la sucesión $(a_n b_n)$?



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Al trabajar con compañeros con necesidades educativas especiales se debe evitar afirmaciones como: "ellos no pueden", "son incapaces", "son minusválidos", "no saben".

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan.**

5 Sea $a_n = 10 - \frac{5}{n} + \frac{20}{n^2}$, n = 1, 2, ..., $\varepsilon = 0{,}2$.

Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(10 - \frac{5}{n} + \frac{20}{n^2}\right) = 10$.

**Observa** la demostración:

Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(10 - \frac{5}{n} + \frac{20}{n^2}\right) = 10$. Ponemos

$a_n = 10 - \frac{5}{n} + \frac{20}{n^2}$, L = 10.

Sea $\varepsilon = 0{,}2$. Entonces

$a_n = 10 - \frac{5}{n} + \frac{20}{n^2}$, n = 1, 2, ..., $\varepsilon = 0{,}2$

de donde $n > \frac{25}{\varepsilon} = \frac{25}{0{,}2} = 125$.

Para $n \geq 126$, $|a_n - 10| < 0{,}2$.

Ahora **prueba** con los literales *a* y *c* del ejercicio 2.

6 **Calculen** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para $a_n$, que se define en cada ítem.

a) **Observa**

$a_1 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}$, $a_2 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}$,

$a_3 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} = 1 - \frac{1}{4^2}, \ldots,$

**Completa**

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = ?\quad n \geq 1.$$

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

c) $a_n = \frac{1}{a^n}$, $a > 1$.

d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[(-1)^n + (-1)^{n-1}\right]$.

e) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.



**Saberes previos**

¿Qué es una distribución de probabilidad?

**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué es una variable aleatoria discreta?

**Interdisciplinariedad**

En muchas situaciones de la vida diaria, esperamos al menos uno de dos posibles resultados determinados. Por ejemplo: al jugar tu equipo favorito un partido de fútbol, esperas que pierda o que gane. O cuando se producen ciertos artículos, estos pueden salir buenos o defectuosos. Para situaciones como estas, en las que hay dos posibles resultados, se utiliza la distribución binomial.




Shutterstock, (2020). 205232128

▲ Jóvenes jugando fútbol.

# Distribución binomial o de Bernoulli $B(n, p)$

Una distribución es binomial o de Bernoulli cuando está asociada a dos posibles resultados: éxito ($p$) o fracaso ($q$).

*Ejercicio resuelto*

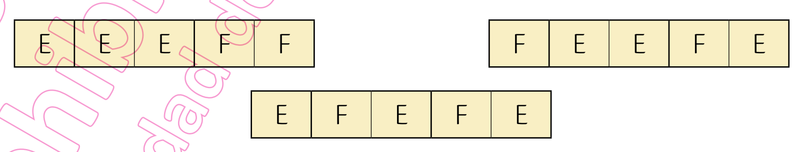
Al lanzar un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres veces el dos?

En este caso, repetimos cinco veces el experimento y en cada lanzamiento tenemos una probabilidad de 1/6 de sacar un dos, y una de 5/6 de no obtener el número dos. Por lo tanto, se trata de una distribución binomial.

La probabilidad de éxito, entonces, es: E = "sacar un 2"; $p(E)=\frac{1}{6}$.

La probabilidad de fracaso es: F = "no sacar un 2"; $p(F)=\frac{5}{6}$.

Para calcular la probabilidad de obtener en las cinco tiradas tres veces el dos, tomamos en cuenta que tenemos tres éxitos y dos fracasos. ¿De cuántas maneras se pueden obtener estos resultados? Tenemos varias opciones. Una de ellas puede ser obtener tres veces dos, en las tres primeras tiradas, y luego en las dos tiradas más sin sacar dos. Esto se puede ilustrar gráficamente así:




Como puedes notar, se trata de calcular de cuántas maneras se pueden ordenar tres éxitos y dos fracasos. De acuerdo con el análisis combinatorio, se tiene:

$$C_k^{\,n}=\frac{n!}{k!(n-k)!};\quad C_3^{\,5}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\times4\times3!}{3!\times2!}=10\ \text{formas.}$$

Como $p(E)=\frac{1}{6}$ y tenemos tres éxitos, y $p(F)=\frac{5}{6}$ y tenemos dos fracasos, entonces:

$$p(\text{obtener 3 éxitos y 2 fracasos}) = 10\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=0{,}032.$$

La probabilidad de obtener tres números dos al lanzar cinco veces un dado es del 3,2 %.

**Definición.** Una variable aleatoria $X$ sigue una distribución binomial o de Bernoulli y se escribe como $Bin\ (n,\ p)$ o $X\equiv Bin(n,p)$ cuando cumple con estas características:

- La variable cuenta el número de veces que ocurre el suceso.
- Depende de dos parámetros $n$ y $p$, en donde $n$ es el número de veces que se realiza el experimento, y $p$ es la probabilidad de que ocurra el suceso.
- La función de probabilidad de obtener $k$ éxitos está dada por:

$$p(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times p^{k}\times q^{(n-k)};\ \text{donde } q = 1 - p.$$

Nota que $p$ es la probabilidad de éxito, $q$ es la probabilidad de fracaso, y estas son complementarias. Es decir, $q = 1 - p$ y $p = 1 - q$, por lo que basta conocer una de ellas para calcular la otra probabilidad.

En el ejemplo anterior tenemos: probabilidad de éxito: $p = 1/6$,
probabilidad de fracaso: $q = 5/6$.
Número de veces que se repite el evento: $n = 5$.
Éxitos por lograr: $k = 3$.

$$p(X=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times p^{k}\times q^{(n-k)};$$

$$p(X=3)=\frac{5!}{3!2!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=0{,}032.$$

*Ejercicio resuelto*

Penélope es jugadora de básquet y encesta con una probabilidad de 1/3. Al cobrar tiros libres y tirar dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que enceste dos veces, una vez, ninguna?

Obtenemos los datos del problema:
Probabilidad de éxito: $p = 1/3$.
Probabilidad de fracaso: $q = 2/3$.
Número de veces que lanza la pelota: $n = 2$.

**a)** ¿Cuál es la probabilidad de que Penélope enceste dos veces?
$k = 2$,

$$p(X=2)=\frac{2!}{2!0!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{0}=\frac{1}{9}.$$

**b)** ¿Cuál es la probabilidad de que Penélope enceste una vez?
$k = 1$,

$$p(X=1)=\frac{2!}{1!1!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{1}=\frac{4}{9}.$$

**c)** ¿Cuál es la probabilidad de que Penélope no enceste?
$k = 0$,

$$p(X=0)=\frac{2!}{0!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{4}{9}.$$



**Recuerda que...**

Un experimento aleatorio sigue una distribución binomial cuando tiene estas características:

- En cada prueba del experimento son posibles dos resultados: el suceso $A$, al que llamaremos éxito, y su contrario $\bar{A}$, al que llamaremos fracaso.
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad del suceso $A$ es constante. La representamos por $p$ y no varía de una prueba a otra. La probabilidad de $\bar{A}$ es $1 - p$.
- El experimento consta de un número $n$ de pruebas.
- A la variable $X$, que representa el número de éxitos obtenidos en cada prueba, la llamaremos variable de la distribución binomial.
- Esta variable es discreta, ya que únicamente tomará los valores 0, 1, 2.......$n$.
- Representaremos por $B(n, p)$ a la distribución binomial, siendo $n$ y $p$ los parámetros de la distribución.

**Glosario**

**distribución.** Función que representa las probabilidades que definen una variable aleatoria o un fenómeno aleatorio.

## Glosario

**binomial.** Perteneciente o relativo al binomio.
**binomio.** Expresión compuesta de dos términos algebraicos unidos por los signos más o menos.
**dispersión.** Distribución estadística de un conjunto de valores.

## Uso de tablas de la distribución binomial

Para el cálculo de la distribución binomial existen tablas que facilitan la obtención de la probabilidad. Para usar estas tablas, es necesario conocer:

- el número de veces que se repite el experimento $n$;
- la probabilidad de éxito $p$;
- el número de éxitos $k$.

*Ejercicio resuelto*

Se lanza al aire una moneda trucada; la probabilidad de obtener cara es del 30 %. Si se lanza la moneda diez veces de manera consecutiva, ¿cuál es la probabilidad de obtener seis caras o menos?

Para este problema, los datos son: $n = 10$; $X = 6$; $p = 30\ \% = 0{,}3$. Localizamos en la columna de $n$ el valor de 10; en la columna contigua, el valor de $X = 6$; y en la fila de $p$, el valor de 0,3. El valor de la probabilidad es donde está la intersección.

En este caso, la probabilidad de obtener seis caras o menos es de 0,989 4.

| N | X | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9997 | 0,9987 | 0,9957 | 0,9888 | 0,9750 | 0,9502 | 0,9102 |
| | 7 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9986 | 0,9962 | 0,9909 | 0,9805 |
| | 8 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9992 | 0,9980 |
| 10 | 0 | 0,5987 | 0,3487 | 0,1969 | 0,1074 | 0,0563 | 0,0282 | 0,0135 | 0,0060 | 0,0025 | 0,0010 |
| | 1 | 0,9139 | 0,7361 | 0,5443 | 0,3758 | 0,2440 | 0,1493 | 0,0860 | 0,0464 | 0,0233 | 0,0107 |
| | 2 | 0,9885 | 0,9298 | 0,8202 | 0,6778 | 0,5256 | 0,3828 | 0,2616 | 0,1673 | 0,0996 | 0,0547 |
| | 3 | 0,9990 | 0,9872 | 0,9500 | 0,8791 | 0,7759 | 0,6496 | 0,5138 | 0,3823 | 0,2660 | 0,1719 |
| | 4 | 0,9999 | 0,9984 | 0,9901 | 0,9672 | 0,9219 | 0,8497 | 0,7515 | 0,6331 | 0,5044 | 0,3770 |
| | 5 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9986 | 0,9936 | 0,9803 | 0,9527 | 0,9051 | 0,8338 | 0,7384 | 0,6230 |
| | 6 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9991 | 0,9965 | 0,9894 | 0,9740 | 0,9452 | 0,8980 | 0,8281 |
| | 7 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9996 | 0,9984 | 0,9952 | 0,9877 | 0,9726 | 0,9453 |
| | 8 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9995 | 0,9983 | 0,9955 | 0,9893 |
| | 9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0,9999 | 0,9997 | 0,9990 |

▲ Tabla de la distribución binomial. Tomada de: http://www-eio.upc.edu/teaching/estad/MC/taules/com-usar-taules.pdf

## Probabilidad acumulada

*Ejercicio resuelto*

Una prueba de matemática está compuesta por diez preguntas de selección múltiple, cada una de ellas con cuatro respuestas, una de ellas correcta. Un estudiante contesta al azar.

**a)** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos ocho preguntas?
**b)** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte a lo sumo tres preguntas?
**c)** ¿Cuál es la media y la varianza de la distribución de probabilidad?

De acuerdo con los datos, se trata de una distribución $B(n, p)$.
$n = 10$; $p = 0{,}25$; $q = 0{,}75$.

**a)** Probabilidad de acertar al menos ocho preguntas: quiere decir que puede acertar más de ocho. Calculamos cada probabilidad en la tabla.

$$P[X \geq 8] = P[X = 8] + P[X = 9] + P[X = 10]$$
$$= 0{,}004 + 0{,}000 + 0{,}000 = 0{,}004.$$

**b)** Probabilidad de acertar a lo sumo tres preguntas: quiere decir que puede acertar hasta tres preguntas. Calculamos cada probabilidad en la tabla.

$$P[X \leq 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]$$
$$= 0{,}056\,3 + 0{,}187\,7 + 0{,}281\,6 + 0{,}250\,3 = 0{,}775\,9.$$

**c)** La media y la varianza de la distribución es:

$$\mu = np = 10(0{,}25) = 2{,}5$$
$$\sigma^2 = np(1-p) = 10(0{,}25)(0{,}75) = 1{,}875.$$

## Recuerda que...

Si tenemos una distribución binomial $B(n, p)$ de parámetro $n$ y $p$, podemos determinar lo siguiente:

**Media o esperanza.** Mide el número esperado de éxitos o media; está dada como $\mu = np$.

**Desviación típica.** Es la medida de dispersión y mide lo alejados que están los datos de la media; está determinada por $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

**Varianza.** Es el cuadrado de la desviación típica: $\sigma^2 = np(1-p)$.

**Tabla de probabilidades puntuales de la distribución binomial (n,p)**

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

| | | | | | | | | *p* | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | *k* | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 1/6 | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 1/3 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 |
| 5 | 0 | 0,9510 | 0,7738 | 0,5905 | 0,4437 | 0,4019 | 0,3277 | 0,2373 | 0,1681 | 0,1317 | 0,1160 | 0,0778 | 0,0503 | 0,0313 |
| | 1 | 0,0480 | 0,2036 | 0,3281 | 0,3915 | 0,4019 | 0,4096 | 0,3955 | 0,3602 | 0,3292 | 0,3124 | 0,2592 | 0,2059 | 0,1563 |
| | 2 | 0,0010 | 0,0214 | 0,0729 | 0,1382 | 0,1608 | 0,2048 | 0,2637 | 0,3087 | 0,3292 | 0,3364 | 0,3456 | 0,3369 | 0,3125 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0011 | 0,0081 | 0,0244 | 0,0322 | 0,0512 | 0,0879 | 0,1323 | 0,1646 | 0,1811 | 0,2304 | 0,2757 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0022 | 0,0032 | 0,0064 | 0,0146 | 0,0284 | 0,0412 | 0,0488 | 0,0768 | 0,1128 | 0,1563 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 | 0,0024 | 0,0041 | 0,0053 | 0,0102 | 0,0185 | 0,0313 |
| 6 | 0 | 0,9415 | 0,7351 | 0,5314 | 0,3771 | 0,3349 | 0,2621 | 0,1780 | 0,1176 | 0,0878 | 0,0754 | 0,0467 | 0,0277 | 0,0156 |
| | 1 | 0,0571 | 0,2321 | 0,3543 | 0,3993 | 0,4019 | 0,3932 | 0,3560 | 0,3025 | 0,2634 | 0,2437 | 0,1866 | 0,1359 | 0,0938 |
| | 2 | 0,0014 | 0,0305 | 0,0984 | 0,1762 | 0,2009 | 0,2458 | 0,2966 | 0,3241 | 0,3292 | 0,3280 | 0,3110 | 0,2780 | 0,2344 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0021 | 0,0146 | 0,0415 | 0,0536 | 0,0819 | 0,1318 | 0,1852 | 0,2195 | 0,2355 | 0,2765 | 0,3032 | 0,3125 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0012 | 0,0055 | 0,0080 | 0,0154 | 0,0330 | 0,0595 | 0,0823 | 0,0951 | 0,1382 | 0,1861 | 0,2344 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0006 | 0,0015 | 0,0044 | 0,0102 | 0,0165 | 0,0205 | 0,0369 | 0,0609 | 0,0938 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0014 | 0,0018 | 0,0041 | 0,0083 | 0,0156 |
| 7 | 0 | 0,9321 | 0,6983 | 0,4783 | 0,3206 | 0,2791 | 0,2097 | 0,1335 | 0,0824 | 0,0585 | 0,0490 | 0,0280 | 0,0152 | 0,0078 |
| | 1 | 0,0659 | 0,2573 | 0,3720 | 0,3960 | 0,3907 | 0,3670 | 0,3115 | 0,2471 | 0,2048 | 0,1848 | 0,1306 | 0,0872 | 0,0547 |
| | 2 | 0,0020 | 0,0406 | 0,1240 | 0,2097 | 0,2344 | 0,2753 | 0,3115 | 0,3177 | 0,3073 | 0,2985 | 0,2613 | 0,2140 | 0,1641 |
| | 3 | 0,0000 | 0,0036 | 0,0230 | 0,0617 | 0,0781 | 0,1147 | 0,1730 | 0,2269 | 0,2561 | 0,2679 | 0,2903 | 0,2918 | 0,2734 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0026 | 0,0109 | 0,0156 | 0,0287 | 0,0577 | 0,0972 | 0,1280 | 0,1442 | 0,1935 | 0,2388 | 0,2734 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0012 | 0,0019 | 0,0043 | 0,0115 | 0,0250 | 0,0384 | 0,0466 | 0,0774 | 0,1172 | 0,1641 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0013 | 0,0036 | 0,0064 | 0,0084 | 0,0172 | 0,0320 | 0,0547 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0016 | 0,0037 | 0,0078 |
| 8 | 0 | 0,9227 | 0,6634 | 0,4305 | 0,2725 | 0,2326 | 0,1678 | 0,1001 | 0,0576 | 0,0390 | 0,0319 | 0,0168 | 0,0084 | 0,0039 |
| | 1 | 0,0746 | 0,2793 | 0,3826 | 0,3847 | 0,3721 | 0,3355 | 0,2670 | 0,1977 | 0,1561 | 0,1373 | 0,0896 | 0,0548 | 0,0313 |
| | 2 | 0,0026 | 0,0515 | 0,1488 | 0,2376 | 0,2605 | 0,2936 | 0,3115 | 0,2965 | 0,2731 | 0,2587 | 0,2090 | 0,1569 | 0,1094 |
| | 3 | 0,0001 | 0,0054 | 0,0331 | 0,0839 | 0,1042 | 0,1468 | 0,2076 | 0,2541 | 0,2731 | 0,2786 | 0,2787 | 0,2568 | 0,2188 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0004 | 0,0046 | 0,0185 | 0,0260 | 0,0459 | 0,0865 | 0,1361 | 0,1707 | 0,1875 | 0,2322 | 0,2627 | 0,2734 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0004 | 0,0026 | 0,0042 | 0,0092 | 0,0231 | 0,0467 | 0,0683 | 0,0808 | 0,1239 | 0,1719 | 0,2188 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0011 | 0,0038 | 0,0100 | 0,0171 | 0,0217 | 0,0413 | 0,0703 | 0,1094 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0012 | 0,0024 | 0,0033 | 0,0079 | 0,0164 | 0,0313 |
| | 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0007 | 0,0017 | 0,0039 |
| 9 | 0 | 0,9135 | 0,6302 | 0,3874 | 0,2316 | 0,1938 | 0,1342 | 0,0751 | 0,0404 | 0,0260 | 0,0207 | 0,0101 | 0,0046 | 0,0020 |
| | 1 | 0,0830 | 0,2985 | 0,3874 | 0,3679 | 0,3489 | 0,3020 | 0,2253 | 0,1556 | 0,1171 | 0,1004 | 0,0605 | 0,0339 | 0,0176 |
| | 2 | 0,0034 | 0,0629 | 0,1722 | 0,2597 | 0,2791 | 0,3020 | 0,3003 | 0,2668 | 0,2341 | 0,2162 | 0,1612 | 0,1110 | 0,0703 |
| | 3 | 0,0001 | 0,0077 | 0,0446 | 0,1069 | 0,1302 | 0,1762 | 0,2336 | 0,2668 | 0,2731 | 0,2716 | 0,2508 | 0,2119 | 0,1641 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0006 | 0,0074 | 0,0283 | 0,0391 | 0,0661 | 0,1168 | 0,1715 | 0,2048 | 0,2194 | 0,2508 | 0,2600 | 0,2461 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0050 | 0,0078 | 0,0165 | 0,0389 | 0,0735 | 0,1024 | 0,1181 | 0,1672 | 0,2128 | 0,2461 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0006 | 0,0010 | 0,0028 | 0,0087 | 0,0210 | 0,0341 | 0,0424 | 0,0743 | 0,1160 | 0,1641 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0012 | 0,0039 | 0,0073 | 0,0098 | 0,0212 | 0,0407 | 0,0703 |
| | 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0013 | 0,0035 | 0,0083 | 0,0176 |
| | 9 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0008 | 0,0020 |
| 10 | 0 | 0,9044 | 0,5987 | 0,3487 | 0,1969 | 0,1615 | 0,1074 | 0,0563 | 0,0282 | 0,0173 | 0,0135 | 0,0060 | 0,0025 | 0,0010 |
| | 1 | 0,0914 | 0,3151 | 0,3874 | 0,3474 | 0,3230 | 0,2684 | 0,1877 | 0,1211 | 0,0867 | 0,0725 | 0,0403 | 0,0207 | 0,0098 |
| | 2 | 0,0042 | 0,0746 | 0,1937 | 0,2759 | 0,2907 | 0,3020 | 0,2816 | 0,2335 | 0,1951 | 0,1757 | 0,1209 | 0,0763 | 0,0439 |
| | 3 | 0,0001 | 0,0105 | 0,0574 | 0,1298 | 0,1550 | 0,2013 | 0,2503 | 0,2668 | 0,2601 | 0,2522 | 0,2150 | 0,1665 | 0,1172 |
| | 4 | 0,0000 | 0,0010 | 0,0112 | 0,0401 | 0,0543 | 0,0881 | 0,1460 | 0,2001 | 0,2276 | 0,2377 | 0,2508 | 0,2384 | 0,2051 |
| | 5 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0015 | 0,0085 | 0,0130 | 0,0264 | 0,0584 | 0,1029 | 0,1366 | 0,1536 | 0,2007 | 0,2340 | 0,2461 |
| | 6 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0012 | 0,0022 | 0,0055 | 0,0162 | 0,0368 | 0,0569 | 0,0689 | 0,1115 | 0,1596 | 0,2051 |
| | 7 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0008 | 0,0031 | 0,0090 | 0,0163 | 0,0212 | 0,0425 | 0,0746 | 0,1172 |
| | 8 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0004 | 0,0014 | 0,0030 | 0,0043 | 0,0106 | 0,0229 | 0,0439 |
| | 9 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0016 | 0,0042 | 0,0098 |
| | 10 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0010 |



▲ Tabla de distribución binomial. Tomada de: http://www.uv.es/~montes/nau_gran/tablas.pdf

@ **Conexiones con las TIC**

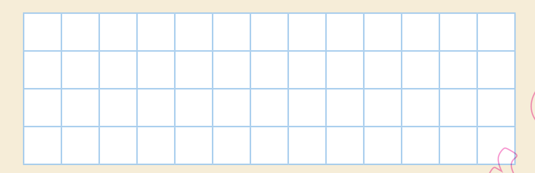
En la actualidad, las tablas para el cálculo de la distribución binomial pueden ser sustituidas por las plantillas que se presentan en Excel. En el enlace, se explica cómo construir en Excel una plantilla para calcular la probabilidad binomial: ***bit.ly/2VDwFQW***

# Taller práctico

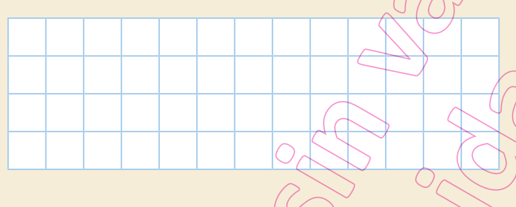
DCCD: M.5.3.19. Reconocer un experimento de Bernoulli en diferentes contextos (control de calidad, análisis de datos, entre otros) y la distribución binomial en problemas de texto, identificando los valores de p y q.
DCCD: M.5.3.20. Calcular probabilidades binomiales con la fórmula (o con el apoyo de las TIC), la media, la varianza de distribuciones binomiales, y graficar.

**1** **Analiza** y **resuelve** las siguientes situaciones relacionadas con probabilidad binomial.

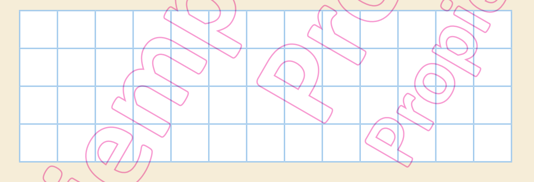
a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire se obtengan siete caras si se lanza diez veces?



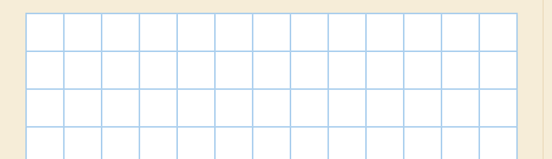
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el número cinco al lanzar nueve veces un dado?



c) Un jugador de básquet tiene una probabilidad de 0,6 de encestar canastas de tres puntos. Si realiza cuatro lanzamientos consecutivos, ¿cuál es la probabilidad de que enceste tres?

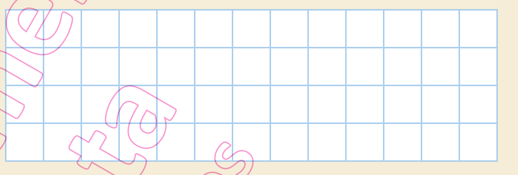


d) En una fábrica de bandas de distribución para autos, se detecta que el 5 % de bandas están defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar una muestra de treinta piezas, haya exactamente cuatro bandas defectuosas?

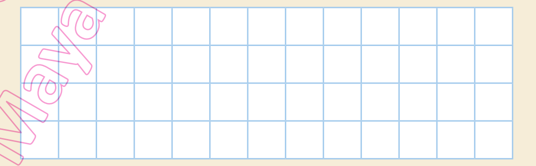


**2** **Resuelve** los siguientes problemas sin utilizar la tabla de distribución binomial.

a) En una fábrica de balones de fútbol se conoce que el 30 % de balones salen defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra de ocho se encuentren dos balones defectuosos?



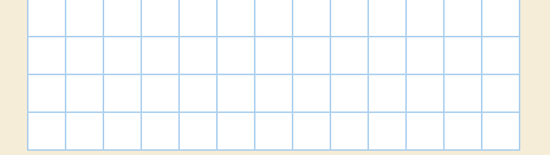
b) En un instituto de inglés se atiende a varias personas diariamente, de las cuales el 10 % no está de acuerdo con la calidad del servicio. ¿Cuál es la probabilidad de que al aplicar una encuesta a quince clientes, cinco no hayan recibido un buen servicio?



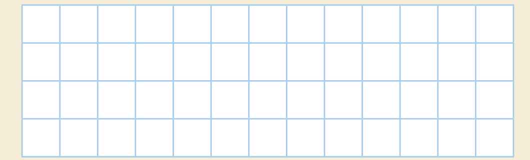
**3** **Resuelve** los siguientes problemas; **utiliza** la tabla de distribución binomial.

a) En un laboratorio farmacéutico se está probando cierto antibiótico sobre una misma especie de animales. La probabilidad de que este medicamento tenga una reacción negativa es del 15 %. Si el antibiótico fue administrado a diez animales, determina las probabilidades de que haya reacción negativa en los siguientes casos:

**a.** En dos animales.



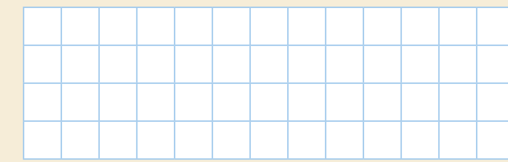
**b.** En ningún animal.



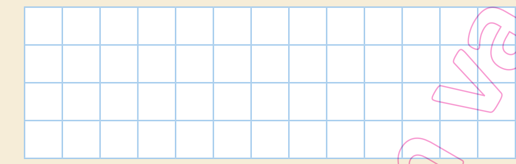
**c.** En menos de cuatro animales.



**d.** En más de tres animales



**e.** Entre dos y cinco animales.



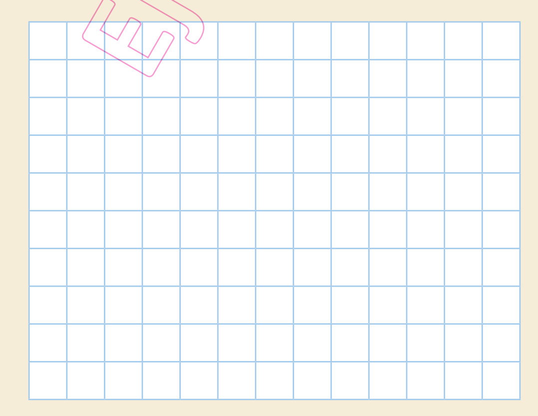
**4** La probabilidad de que un estudiante apruebe el curso de francés es de 0,3. **Halla** la probabilidad de que de un grupo de siete estudiantes matriculados en francés:

a) Ninguno de los siete apruebe el curso.

b) Aprueben todos el curso de francés.

c) Al menos dos aprueben el curso.

d) **Halla** la media y la desviación típica.



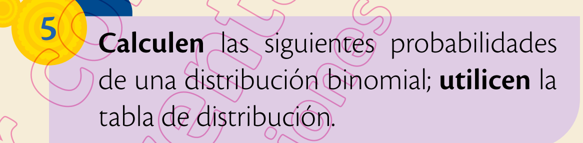
## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

En ocasiones los alumnos no saben como actuar frente a un compañero con discapacidad, pero, bastará con una explicación del maestro para que sea aceptado en el grupo con sus habilidades especiales.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan.**



**5** **Calculen** las siguientes probabilidades de una distribución binomial; **utilicen** la tabla de distribución.

a) $B(9; 0{,}3)$
$P(X = 5)$, $P(X = 7)$, $P(X = 4)$

b) $B(6; 0{,}25)$
$P(X = 5)$, $P(X = 2)$, $P(X = 4)$

c) $B(10; 0{,}40)$
$P(X = 2)$, $P(X \leq 3\ 7)$, $P(X \geq 9)$

**6** **Calculen** las siguientes probabilidades.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire ocho veces, se obtengan, como máximo, tres veces cara?

b) Se lanza al aire un dado seis veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos veces el uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de dos veces el uno?

**7** **Resuelvan**. En una empresa de llantas para autos, se detectó que el 30 % de llantas de un gran lote son defectuosas. Si se toman tres llantas al azar, **calculen**:

a) La probabilidad de que las tres llantas sean defectuosas.

b) La probabilidad de que solamente dos sean defectuosas.

c) La probabilidad de que ninguna de ellas sea defectuosa.

DCCD: M.5.3.21. Analizar las formas de las gráficas de distribuciones normales en ejemplos de aplicación, con el apoyo de las TIC, y juzgar en contexto la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.



**Saberes previos**

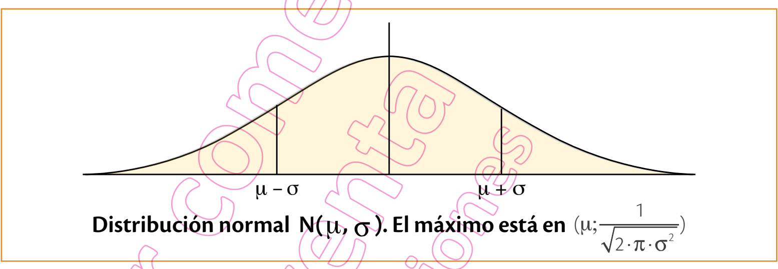
¿Qué es la campana de Gauss?

**Desequilibrio cognitivo**

¿Cuáles son algunos de los aspectos cotidianos que se pueden estudiar y que, al graficarlos, se asemejan a la forma de una campana?

# Distribución normal $X \equiv N(\mu, \sigma)$

**Definición.** Una distribución de probabilidad sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$, que se representa como $N(\mu, \sigma)$ cuando la representación gráfica de su función de densidad es una curva positiva continua, simétrica a la media, de máximo en la media, y que tiene dos puntos de inflexión, situados a ambos lados de la media $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$ respectivamente, y a distancia $\sigma$ de ella. Es decir, toma la forma de la Figura 3.12.




**Distribución normal $N(\mu, \sigma)$. El máximo está en** $(\mu; \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}})$

▲ Figura 3.12.

Dependiendo de los valores que tomen $\mu$ y $\sigma$, la gráfica de esta función puede ser más alargada o achatada, pero siempre toma la forma de una campana, conocida como la campana de Gauss.

**Propiedades**

i) El área encerrada bajo la curva normal $N(\mu, \sigma)$ siempre es 1 o el 100 % de los casos.

ii) Es una distribución simétrica.

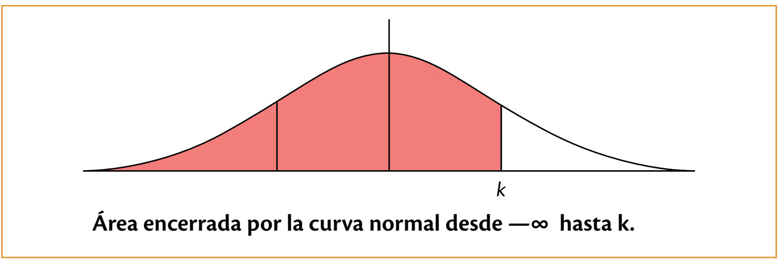
iii) Es asintótica; es decir, sus extremos nunca tocan el eje horizontal, cuyos valores tienden al infinito.

iv) En el centro de la curva se encuentran la media, la mediana y la moda.

v) Los elementos centrales del modelo son la media y la varianza.

La más importante de todas las distribuciones normales es la que tiene por media $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, y se denota como $Z \equiv N(0,1)$. Puesto que el área bajo esta curva normal es 1, se define una probabilidad de la siguiente manera:

para un valor cualquiera $k$, definimos la probabilidad de que la distribución $Z \equiv N(0,1)$ sea menor o igual que $k$ como $P(Z \leq k)$ es el "área encerrada bajo la curva normal $N(0, 1)$ desde $-\infty$ hasta k", es decir, la parte rayada de la Figura 3.13.




**Área encerrada por la curva normal desde $-\infty$ hasta k.**

▲ Figura 3.13.

## Uso de tablas de la distribución normal $N(0, 1)$

El cálculo de la distribución normal se realiza mediante valores tabulados desde 0 hasta 3,99, los cuales se encuentran en tablas como la que se presenta en la página 97 de este texto.

*Ejercicio resuelto*

Calcular la probabilidad $P(Z \leq 0{,}46)$. Para ello, se siguen los siguientes pasos:

i) Buscar la parte entera y las décimas en la primera columna; en este caso, 0,46.

ii) Buscar las centésimas en la primera fila; en este caso, 0,06.

iii) El punto de intersección de la fila y la columna es la probabilidad buscada; en este caso, $P(Z \leq 0{,}46) = 0{,}677\ 2$.

0,46

| Z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0,1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0,2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0,3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0,4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0,5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0,6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0,7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0,8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |

▲ Tomada de: http://www.x.edu.uy/inet/Distribucion_Normal_ejemplos.pdf

### Tipificación

En ocasiones no tenemos una distribución normal N(0, 1), sino una distribución normal $N(\mu, \sigma)$. Para el cálculo se debe realizar el proceso de tipificación de la siguiente manera:

Si $X$ sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$, entonces la variable $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ sigue una distribución N(0, 1).

El paso de la variable $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ a $Z \rightarrow N(0,1)$ se denomina tipificación de la variable $X$.

*Ejercicio resuelto*

La temperatura en Guayaquil, durante el mes de agosto, está distribuida normalmente con una media de 28,5 °C y desviación estándar de 4 °C. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura en Guayaquil durante el mes de agosto esté por debajo de los 30 °C?

Los datos que proporciona el problema son:

$\mu = 28{,}5$ °C; $\sigma = 4$ °C; $X = 30$ °C.

Se trata de una distribución normal N(28,5; 4). Para poder utilizar la tabla y calcular la probabilidad, realizamos el proceso de tipificación.

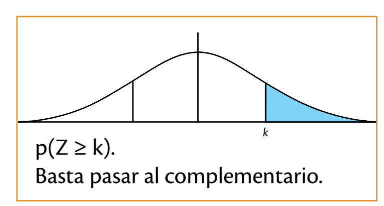
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{30 - 28{,}5}{4} = 0{,}375.$$

Determinamos la probabilidad para Z = 0,38 en la tabla de la página 97. $P(Z \leq 0{,}38) = 0{,}648\ 0$. Es decir, existe la probabilidad del 64 % de que la temperatura en Guayaquil sea menor de 30 °C.



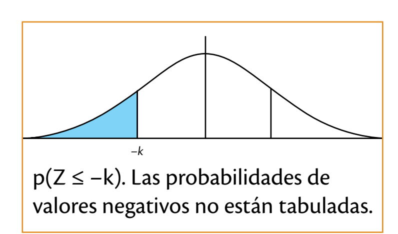
**Recuerda que...**

- Para calcular una probabilidad con un valor mayor a 3,99, basta fijarse en que las probabilidades que corresponden a valores mayores a 3,62 tienen un valor de 0,999 9 que se aproxima a 1.
- No tiene sentido calcular probabilidades del tipo $P(Z = k)$. Estas siempre valen cero, pues no encierran ningún área.
- Al calcular probabilidades del tipo $P(Z \geq k)$, se hace uso de su complementario. Así, $P(Z \geq k) = 1 - P(Z < k)$.



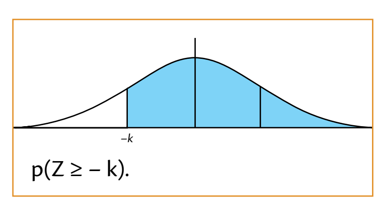

p(Z ≥ k).
Basta pasar al complementario.

▲ Figura 3.14.



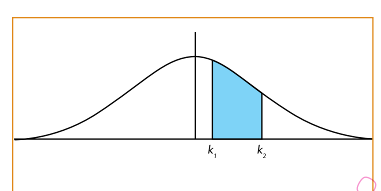

p(Z ≤ −k). Las probabilidades de valores negativos no están tabuladas.

▲ Figura 3.15




p(Z ≥ – k).

▲ Figura 3.16.




$p(k_1 \leq Z \leq k_2)$. Probabilidad comprendida entre dos valores.

▲ Figura 3.17.

Información adaptada de:
http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T03.pdf

## Cálculo de probabilidades con distribución normal

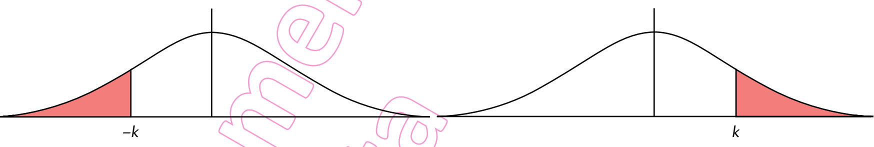
**a)** Si $k$ es positivo y se quiere calcular $P(Z \geq k)$, es decir, el área rayada de la Figura 3.14., basta encontrar el complemento de esta probabilidad. Es decir:

$$P(Z \geq k) = 1 - P(Z \leq k).$$

**b)** Si $k$ es positivo y se quiere calcular $P(Z \leq -k)$, es decir el área rayada de la Figura 3.15., entonces por simetría,

$$P(Z \leq -k) = P(Z \geq k).$$

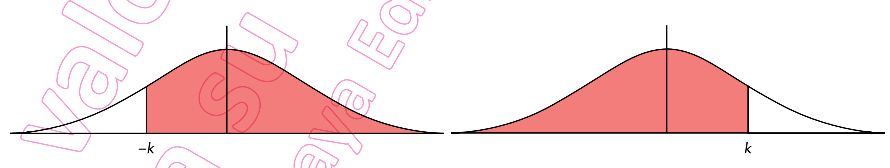
Esta se calcula como en el caso anterior.




p(Z ≤ −k) = p(Z ≥ k). La simetría permite reducir este caso al anterior.

**c)** Si $k$ es positivo y se quiere calcular $P(Z \geq -k)$, es decir el área rayada de la Figura 3.16., entonces por simetría se obtiene

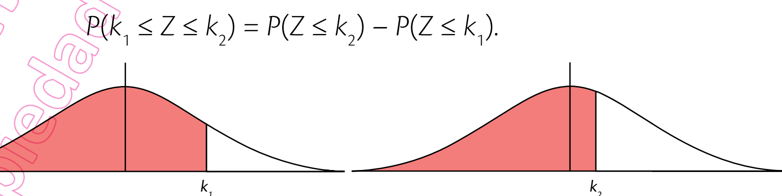
$$P(Z \geq -k) = P(Z \leq k).$$




p(Z ≥ −k) = p(Z ≤ k). La simetría permite reducir este caso al que ya está tabulado.

**d)** Las probabilidades comprendidas entre dos valores, $P(k_1 \leq Z \leq k_2)$, es decir, el área rayada de la Figura 3.17., se calcula restando las dos áreas:

$$P(k_1 \leq Z \leq k_2) = P(Z \leq k_2) - P(Z \leq k_1).$$




$p(Z \leq k_2)$. En la primera imagen. $p(Z \leq k_1)$ en la segunda imagen.
Al restar obtenemos el área pedida.

*Ejercicio resuelto*

El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media 3,5 kg y una desviación típica de 0,6 kg. Calcular la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2,7 kg y 4 kg.

La distribución es normal, con $N(3{,}5;\ 0{,}6)$; $X$ = peso de los niños. Se pide calcular $P(2{,}7 \leq X \leq 4)$. Tipificamos así:

$$P(2{,}7 \leq X \leq 4) = P\left(\frac{2{,}7-3{,}5}{0{,}6} \leq Z \leq \frac{4-3{,}5}{0{,}6}\right)$$

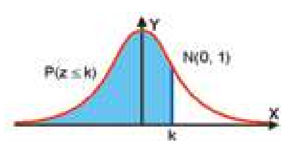
$$= P(-1{,}33 \leq Z \leq 0{,}83) = P(Z \leq 0{,}83) - P(Z \leq -1{,}33)$$

$$= P(Z \leq 0{,}83) - 1 + P(Z \leq 1{,}33) = 0{,}704\,9.$$

**Glosario**

**simetría.** Correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano.

## Áreas bajo la distribución de probabilidad normal estándar, N (0,1)




| z | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4,0 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

▲ Tabla de distribución normal. Tomado de: https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/dfaraco/docencia/ambientalesmat1/Normal.htm

*Ejercicio resuelto*

Si $X$ es una variable aleatoria de distribución $N(\mu, \sigma)$. Hallemos $P(\mu - 3\sigma \leq \mu + 3\sigma)$.

Realizamos el proceso de tipificación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}; \quad x_1 = \mu - 3\sigma, \; x_2 = \mu + 3\sigma .$$

Entonces: $P(x_1 \leq X \leq x_2)$.

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$,

$$= P\left(\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right) \leq Z \leq \left(\frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma}\right),$$

$$= P(-3 \leq Z \leq 3) = P(z \leq 3) - P(z \leq -3),$$

$$= P(z \leq 3) - (1 - P(z \leq 3)) = P(z \leq -3) - 1 + P(z \leq 3),$$

= 0,998 6 − 1 + 0,998 6 = 0,997 2.

Aproximadamente el 99,72% de los valores de $X$ están a más de las tres desviaciones típicas de la media.

### Interdisciplinariedad

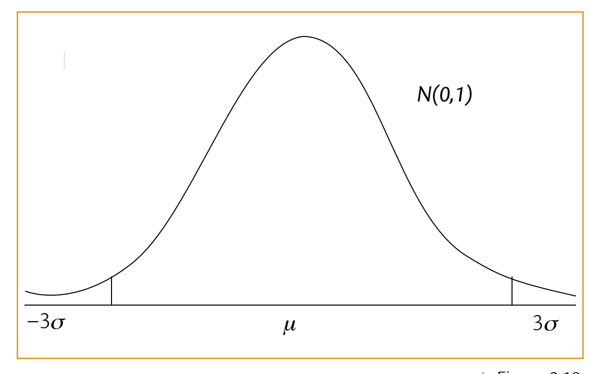
**Matemática e historia**

La campana de Gauss es una representación gráfica de la distribución normal de un grupo de datos. Estos se reparten en valores bajos, medios y altos, creando una forma acampanada y simétrica con respecto a un determinado parámetro. Lleva el nombre del genio de la matemática Carl Friedrich Gauss, aunque quien realmente la descubrió y publicó fue Abraham de Moivre.



Shutterstock, (2020). 88369741

▲ Carl Gauss (1777 - 1855).




▲ Figura 3.18.

# Taller práctico

DCCD: M.5.3.21. Analizar las formas de las gráficas de distribuciones normales en ejemplos de aplicación, con el apoyo de las TIC, y juzgar en contexto la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

**1** **Utiliza** la tabla de la normal estándar $N(0, 1)$ y **determina** las siguientes probabilidades:

a) $P(Z \leq 1{,}15)$.

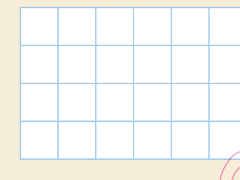
b) $P(Z \leq 0{,}5)$.

c) $P(Z \leq 0{,}84)$.

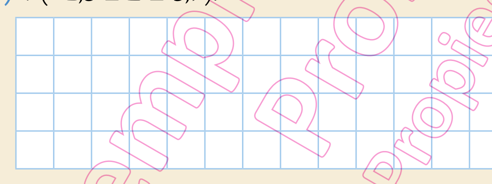
d) $P(Z \leq 2{,}94)$.

**2** **Determina** las siguientes probabilidades en N(0, 1).

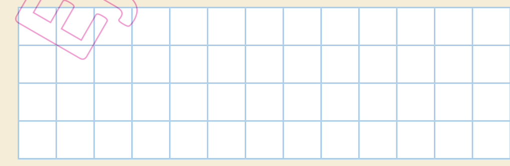
a) $P(1{,}5 \leq Z \leq 2)$.



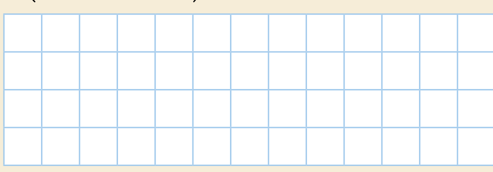
b) $P(-2{,}3 \leq Z \leq 3{,}7)$.



c) $P(-3{,}4 \leq Z \leq -1{,}8)$.

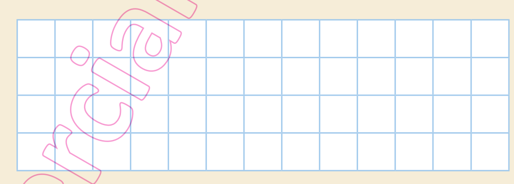


d) $P(-1{,}6 \leq Z \leq 1{,}6)$.

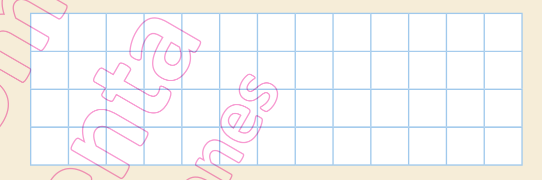


**3** **Calcula** en $N(20,4)$ las siguientes probabilidades:

a) $P(X \leq 25)$.



b) $P(X \geq 17)$.



**4** **Analiza** y **calcula**.
En la siguiente figura, el área comprendida entre el eje $x$ y la curva es $I$. **Determina** mentalmente cuánto vale el área que queda a la izquierda de la recta $x = \mu$.

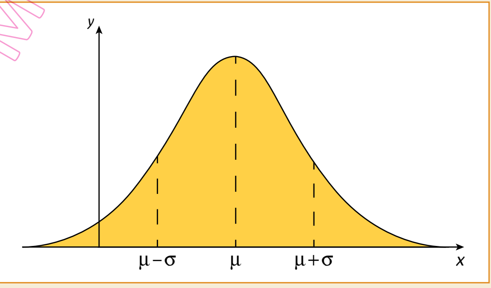



Figura 3.19.
*(Tomado de Grupo Editorial Bruño, p. 334)*

**5** **Calcula** la probabilidad.
La estancia de turistas en un determinado hotel sigue una distribución normal media de ocho días y una desviación típica de tres. ¿Cuál es la probabilidad de estadía en los siguientes casos?

a) Que su estadía sea inferior a seis días.

b) Que su estadía sea superior a dos días.

c) Que su estadía esté comprendida entre seis y doce días.

**6** **Resuelve** el siguiente problema.
En una evaluación sobre 100 puntos aplicada a 500 estudiantes para ingresar a la universidad, se obtiene una media de 70 y una desviación típica de 20. Suponiendo que el puntaje se distribuye normalmente, **halla** el número de estudiantes en los siguientes casos:

a) Qué el puntaje de los estudiantes se encuentre entre 60 y 65 puntos.

b) Qué el puntaje sea más de 90 puntos.

c) Qué el puntaje sea menos de 64 puntos.

d) Qué el puntaje sea de 64 puntos o más.

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Las percepciones que tenemos sobre las personas afectan al éxito y al fracaso de lo que hacen esas personas. Por lo tanto tengamos una actitud positiva en todas nuestra actividades.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** En un colegio se aplicó un test de aptitud verbal. Los resultados dieron una puntuación que sigue una distribución normal con media 80 y desviación típica 15.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un puntaje de aptitud verbal entre 95 y 100?
b) En un grupo de 500 estudiantes, ¿cuántos de ellos se espera que tengan un coeficiente superior a 120?

**8** En una entidad bancaria, los montos que se solicitan siguen una distribución normal media de \$ 60 000 y una desviación estándar de \$ 15 000. El día de hoy se recibió una solicitud de préstamo.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el monto solicitado sea de \$ 70 000 o superior? ($P(X \geq 70\,000)$.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el monto solicitado oscile entre \$ 55 000 y \$ 75 000?

**9** La gerente de personal de una gran compañía requiere que los solicitantes a un puesto efectúen cierta prueba y alcancen una calificación de 500. Si las calificaciones de la prueba se distribuyen normalmente con media $\mu = 485$ y desviación estándar $\sigma = 30$, ¿qué porcentaje de los solicitantes pasará la prueba?

**10** El tiempo, empleado en horas, destinado a hacer un determinado producto sigue una distribución $N(10, 2)$. Se pide la probabilidad de que ese producto se haga:

a) En menos de 7 horas.
b) En 8 y 13 horas.
c) En exactamente 9 horas.

DCCD: M.5.3.18. Identificar variables aleatorias discretas en problemas de texto y reconocer la distribución de Poisson, como ejemplo de variables aleatorias discretas y sus aplicaciones.



**Saberes previos**

¿Cuál es la diferencia entre variable discreta y variable continua?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Existe alguna relación entre distribución binomial y normal?



**Recuerda la definición**

- La distribución de Poisson es, junto con la distribución binomial, una de las más importantes distribuciones de probabilidad para variables discretas. Es decir, solo puede tomar valores 0, 1, 2, 3, 4, …, k.
- Utilizaremos la distribución de Poisson como una aproximación del experimento binomial, donde el número de pruebas es muy alto $(n \to \infty)$, pero con probabilidad de éxito muy baja $(p \to 0)$.

# Distribución de Poisson X: Ps(λ)

Para comprender mejor esta distribución, vamos a analizar el siguiente caso. Supongamos que tenemos una tabla rectangular cuya superficie se encuentra pintada; al observarla fijamente, es posible detectar pequeños defectos. Se desea determinar la probabilidad de que aparezcan estos defectos y, para ello, se divide la superficie en otras de igual tamaño, como muestra la Figura 3.19.

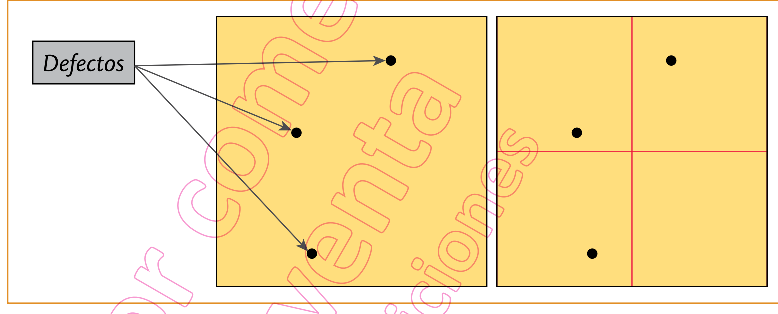



Figura 3.20.

Observamos que en unas zonas aparece el defecto y en otras no. Supongamos que en cada zona solo aparece un defecto. Entonces podemos utilizar la distribución binomial para calcular la probabilidad de que en la superficie en mención aparezcan 0, 1, 2, 3, 4 defectos.

$$B(n,k)=\binom{4}{k}\left(\frac{p}{4}\right)^{k}\left(1-\frac{p}{4}\right)^{4-k}.$$

Ahora bien, en una zona podría aparecer más de un defecto, por lo que el cálculo es inexacto. Para corregir este error, debemos subdividir el área en varias regiones de tal manera que podamos obtener el límite de la fórmula de la distribución binomial y obtener la fórmula de Poisson.

## Características de la distribución de Poisson $X:\ Ps(\lambda)$

La distribución de Poisson de una variable aleatoria $X$ y parámetro $\lambda$ se representa con la notación

$$X:\ Ps(\lambda).$$

**Propiedades:**

- Se aplica a una población de tamaño infinito.
- Los sucesos son independientes entre sí.
- La distribución de Poisson parte de la distribución binomial.
- Cuando en una distribución binomial se realiza el experimento muchas veces, la muestra $n$ es grande y la probabilidad de éxito en cada ensayo es baja. Es aquí cuando se aplica la distribución de Poisson.
- El producto de $np$ tiende a aproximarse a un valor promedio, al que lo denominamos parámetro $\lambda$.

## Función de probabilidad de Poisson

La función de probabilidad de la distribución de Poisson se expresa así:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}.$$

Algunos ejemplos de probabilidad de distribución de Poisson son:

- Número de clientes atendidos en un banco en dos horas.
- Número de personas que ingresan a una página web en una hora.
- Número de partículas de impureza en un metro cúbico de agua.
- Número de defectos en un metro cuadrado de tela.
- Número de vehículos que cruzan un semáforo en 30 segundos.

*Ejercicios resueltos*

1. En una fábrica de tornillos, la probabilidad de que uno de ellos salga defectuoso es de 0,012. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 800 tornillos ya fabricados salgan 5 defectuosos?

   Los datos son:
   $p=0{,}012;\ \ n=800;\ \ \lambda=800(0{,}012)=9{,}6;\ \ k=5,$

   $$P(X=5)=e^{-9{,}6}\frac{(9{,}6)^{5}}{5!}=0{,}046\ 02.$$

   La probabilidad de que haya 5 tornillos defectuosos de 800 fabricados es del 4,6 %.

2. La probabilidad de que haya un accidente en una compañía de autobuses es de 0,025 por cada día de trabajo. Si la compañía trabaja 360 días del año, ¿cuál es la probabilidad de tener 4 accidentes?

   Los datos son: $p = 0{,}025$ por cada día de trabajo;
   $n = 360;$ $\lambda=np;$
   $\lambda=360(0{,}025)=9;$ $k=4$

   $$P(X=4)=e^{-9}\frac{(9)^{4}}{4!}=0{,}033\ 7.$$

   La probabilidad de tener 5 accidentes en 360 días es del 3,37 %.

3. Supongamos que se conoce que a un hospital llegan pacientes a la sala de emergencia a razón de 5 cada 2 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 4 personas en 2 horas?
   $X$ es el número de pacientes que llegan a la sala de emergencia del hospital en 2 horas.
   $\lambda=5;\ k=4$

   $$P(X=4)=e^{-5}\frac{(5)^{4}}{4!}=0{,}175\ 467.$$

   La probabilidad de que lleguen a la sala de emergencias 4 personas en 2 horas es del 17,54 %.



**Simbología matemática**

P(X = k) es la probabilidad de ocurrencia cuando la variable discreta $X$ toma un valor infinito $k$.

$\lambda$ (lambda) es la ocurrencia promedio por unidad de tiempo, volumen, área, etc.

$e$ es la constante con valor aproximado de 2,711 828.

$k$ es el número de éxitos por unidad.

**Glosario**

impureza. Materia que, en una sustancia, deteriora alguna o algunas de sus cualidades.

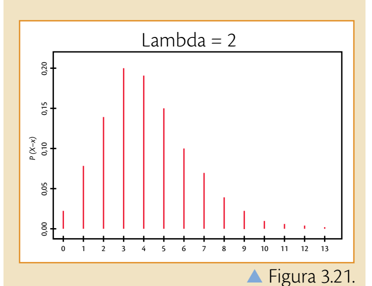


**Recuerda que...**

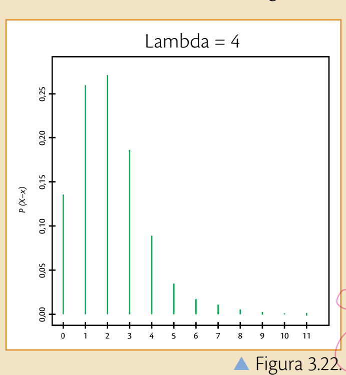
- La media μ o valor esperado en la distribución de Poisson es igual al parámetro $\lambda$.
- La varianza $\sigma^2$ en la distribución de Poisson es igual a $\lambda$.
- La desviación estándar es la raíz cuadrada de $\lambda$.

## @ Conexiones con las TIC

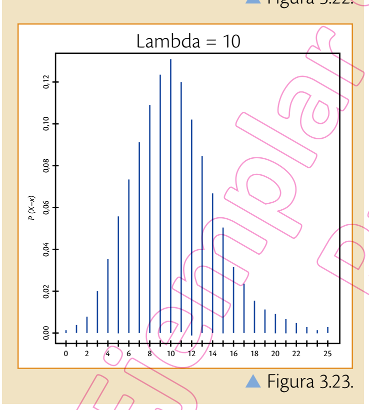
El programa GeoGebra te permite realizar algunas gráficas de distribución estadística.
Si ingresas al siguiente enlace ***bit.ly/2IR5LPC*** podrás mirar el tutorial para efectuar las gráficas que se muestran a continuación.




▲ Figura 3.21.




▲ Figura 3.22.




▲ Figura 3.23.

## Lectura de tablas de la distribución de Poisson

La tabla de probabilidad de Poisson permite resolver los ejercicios y problemas anteriores con mayor facilidad. Para utilizarla es necesario conocer el valor de lambda $\lambda$ y el valor de X. Recuerda que *X* es el número de éxitos que buscamos y que $X = k$.

*Ejercicios resueltos*

1. Supongamos que *X* es una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con $\lambda = 0,9$ y $X = k = 3$. ¿Cuál es la probabilidad de *X*?

Sigue estos pasos:

i) Localiza en la columna de la tabla $x = 3$.
ii) Localiza en la fila de la tabla $\lambda = 0,9$.
iii) Busca la intersección de los dos valores y esa es la probabilidad.

La probabilidad de X es de 0,049 4, que corresponde al 4,9 %.

| $x$ | $\lambda = 0,1$ | $\lambda = 0,2$ | $\lambda = 0,3$ | $\lambda = 0,4$ | $\lambda = 0,5$ | $\lambda = 0,6$ | $\lambda = 0,7$ | $\lambda = 0,8$ | $\lambda = 0,9$ | $\lambda = 1,0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 | 0,3679 |
| 1 | 0,0905 | 0,1637 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 | 0,3679 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 | 0,1217 | 0,1438 | 0,1647 | 0,1839 |
| 3 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 | 0,0613 |
| 4 | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 | 0,0153 |
| 5 | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 | 0,0031 |
| 6 | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 |

2. Retomemos el problema de los pacientes de un hospital y resolvámoslo utilizando la tabla de distribución de Poisson.

   Supongamos que se conoce que a un hospital llegan pacientes a la sala de emergencia a razón de 5 cada 2 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen por lo menos 3 personas en 1 hora?

   X es el número de pacientes que llegan al hospital en 1 hora.
   $\lambda = 2,5$.
   La pregunta hace referencia a que lleguen por lo menos 3 personas, es decir que pueden llegar más. Entonces:

   $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3), = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)].$

   Buscamos en la tabla los valores cuando
   $\lambda = 2,5$ y $k = 0$; $k = 1$ y $k = 2$.

   Obtenemos los valores

   $$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)],$$
   $$= 1 - [0,082\,1 + 0,205\,2 + 0,256\,5],$$
   $$= 0,456\,1.$$

## Distribución de Poisson

Probabilidades de la distribución de Poisson

$$P(\xi = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

| $x$ | λ = 0,1 | λ = 0,2 | λ = 0,3 | λ = 0,4 | λ = 0,5 | λ = 0,6 | λ = 0,7 | λ = 0,8 | λ = 0,9 | λ = 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,9048 | 0,8187 | 0,7408 | 0,6703 | 0,6065 | 0,5488 | 0,4966 | 0,4493 | 0,4066 | 0,3679 |
| 1 | 0,0905 | 0,1637 | 0,2222 | 0,2681 | 0,3033 | 0,3293 | 0,3476 | 0,3595 | 0,3659 | 0,3679 |
| 2 | 0,0045 | 0,0164 | 0,0333 | 0,0536 | 0,0758 | 0,0988 | 0,1217 | 0,1438 | 0,1647 | 0,1839 |
| 3 | 0,0002 | 0,0011 | 0,0033 | 0,0072 | 0,0126 | 0,0198 | 0,0284 | 0,0383 | 0,0494 | 0,0613 |
| 4 | | 0,0001 | 0,0003 | 0,0007 | 0,0016 | 0,0030 | 0,0050 | 0,0077 | 0,0111 | 0,0153 |
| 5 | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0004 | 0,0007 | 0,0012 | 0,0020 | 0,0031 |
| 6 | | | | | | | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 |
| 7 | | | | | | | | | | 0,0001 |

| $x$ | λ = 1,1 | λ = 1,2 | λ = 1,3 | λ = 1,4 | λ = 1,5 | λ = 1,6 | λ = 1,7 | λ = 1,8 | λ = 1,9 | λ = 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,3329 | 0,3012 | 0,2725 | 0,2466 | 0,2231 | 0,2019 | 0,1827 | 0,1653 | 0,1496 | 0,1353 |
| 1 | 0,3662 | 0,3614 | 0,3543 | 0,3452 | 0,3347 | 0,3230 | 0,3106 | 0,2975 | 0,2842 | 0,2707 |
| 2 | 0,2014 | 0,2169 | 0,2303 | 0,2417 | 0,2510 | 0,2584 | 0,2640 | 0,2678 | 0,2700 | 0,2707 |
| 3 | 0,0738 | 0,0867 | 0,0998 | 0,1128 | 0,1255 | 0,1378 | 0,1496 | 0,1607 | 0,1710 | 0,1804 |
| 4 | 0,0203 | 0,0260 | 0,0324 | 0,0395 | 0,0471 | 0,0551 | 0,0636 | 0,0723 | 0,0812 | 0,0902 |
| 5 | 0,0045 | 0,0062 | 0,0084 | 0,0111 | 0,0141 | 0,0176 | 0,0216 | 0,0260 | 0,0309 | 0,0361 |
| 6 | 0,0008 | 0,0012 | 0,0018 | 0,0026 | 0,0035 | 0,0047 | 0,0061 | 0,0078 | 0,0098 | 0,0120 |
| 7 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0008 | 0,0011 | 0,0015 | 0,0020 | 0,0027 | 0,0034 |
| 8 | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0009 |
| 9 | | | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |

| $x$ | λ = 2,1 | λ = 2,2 | λ = 2,3 | λ = 2,4 | λ = 2,5 | λ = 2,6 | λ = 2,7 | λ = 2,8 | λ = 2,9 | λ = 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1225 | 0,1108 | 0,1003 | 0,0907 | 0,0821 | 0,0743 | 0,0672 | 0,0608 | 0,0550 | 0,0498 |
| 1 | 0,2572 | 0,2438 | 0,2306 | 0,2177 | 0,2052 | 0,1931 | 0,1815 | 0,1703 | 0,1596 | 0,1494 |
| 2 | 0,2700 | 0,2681 | 0,2652 | 0,2613 | 0,2565 | 0,2510 | 0,2450 | 0,2384 | 0,2314 | 0,2240 |
| 3 | 0,1890 | 0,1966 | 0,2033 | 0,2090 | 0,2138 | 0,2176 | 0,2205 | 0,2225 | 0,2237 | 0,2240 |
| 4 | 0,0992 | 0,1082 | 0,1169 | 0,1254 | 0,1336 | 0,1414 | 0,1488 | 0,1557 | 0,1622 | 0,1680 |
| 5 | 0,0417 | 0,0476 | 0,0538 | 0,0602 | 0,0668 | 0,0735 | 0,0804 | 0,0872 | 0,0940 | 0,1008 |
| 6 | 0,0146 | 0,0174 | 0,0206 | 0,0241 | 0,0278 | 0,0319 | 0,0362 | 0,0407 | 0,0455 | 0,0504 |
| 7 | 0,0044 | 0,0055 | 0,0068 | 0,0083 | 0,0099 | 0,0118 | 0,0139 | 0,0163 | 0,0188 | 0,0216 |
| 8 | 0,0011 | 0,0015 | 0,0019 | 0,0025 | 0,0031 | 0,0038 | 0,0047 | 0,0057 | 0,0068 | 0,0081 |
| 9 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0007 | 0,0009 | 0,0011 | 0,0014 | 0,0018 | 0,0022 | 0,0027 |
| 10 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0008 |
| 11 | | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 |
| 12 | | | | | | | | | | 0,0001 |

| $x$ | λ = 3,1 | λ = 3,2 | λ = 3,3 | λ = 3,4 | λ = 3,5 | λ = 3,6 | λ = 3,7 | λ = 3,8 | λ = 3,9 | λ = 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0450 | 0,0408 | 0,0369 | 0,0334 | 0,0302 | 0,0273 | 0,0247 | 0,0224 | 0,0202 | 0,0183 |
| 1 | 0,1397 | 0,1304 | 0,1217 | 0,1135 | 0,1057 | 0,0984 | 0,0915 | 0,0850 | 0,0789 | 0,0733 |
| 2 | 0,2165 | 0,2087 | 0,2008 | 0,1929 | 0,1850 | 0,1771 | 0,1692 | 0,1615 | 0,1539 | 0,1465 |
| 3 | 0,2237 | 0,2226 | 0,2209 | 0,2186 | 0,2158 | 0,2125 | 0,2087 | 0,2046 | 0,2001 | 0,1954 |
| 4 | 0,1733 | 0,1781 | 0,1823 | 0,1858 | 0,1888 | 0,1912 | 0,1931 | 0,1944 | 0,1951 | 0,1954 |
| 5 | 0,1075 | 0,1140 | 0,1203 | 0,1264 | 0,1322 | 0,1377 | 0,1429 | 0,1477 | 0,1522 | 0,1563 |
| 6 | 0,0555 | 0,0608 | 0,0662 | 0,0716 | 0,0771 | 0,0826 | 0,0881 | 0,0936 | 0,0989 | 0,1042 |
| 7 | 0,0246 | 0,0278 | 0,0312 | 0,0348 | 0,0385 | 0,0425 | 0,0466 | 0,0508 | 0,0551 | 0,0595 |
| 8 | 0,0095 | 0,0111 | 0,0129 | 0,0148 | 0,0169 | 0,0191 | 0,0215 | 0,0241 | 0,0269 | 0,0298 |
| 9 | 0,0033 | 0,0040 | 0,0047 | 0,0056 | 0,0066 | 0,0076 | 0,0089 | 0,0102 | 0,0116 | 0,0132 |
| 10 | 0,0010 | 0,0013 | 0,0016 | 0,0019 | 0,0023 | 0,0028 | 0,0033 | 0,0039 | 0,0045 | 0,0053 |
| 11 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0009 | 0,0011 | 0,0013 | 0,0016 | 0,0019 |
| 12 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 |
| 13 | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 |
| 14 | | | | | | | | | | 0,0001 |

| $x$ | λ = 4,1 | λ = 4,2 | λ = 4,3 | λ = 4,4 | λ = 4,5 | λ = 4,6 | λ = 4,7 | λ = 4,8 | λ = 4,9 | λ = 5,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0166 | 0,0150 | 0,0136 | 0,0123 | 0,0111 | 0,0101 | 0,0091 | 0,0082 | 0,0074 | 0,0067 |
| 1 | 0,0679 | 0,0630 | 0,0583 | 0,0540 | 0,0500 | 0,0462 | 0,0427 | 0,0395 | 0,0365 | 0,0337 |
| 2 | 0,1393 | 0,1323 | 0,1254 | 0,1188 | 0,1125 | 0,1063 | 0,1005 | 0,0948 | 0,0894 | 0,0842 |
| 3 | 0,1904 | 0,1852 | 0,1798 | 0,1743 | 0,1687 | 0,1631 | 0,1574 | 0,1517 | 0,1460 | 0,1404 |
| 4 | 0,1951 | 0,1944 | 0,1933 | 0,1917 | 0,1898 | 0,1875 | 0,1849 | 0,1820 | 0,1789 | 0,1755 |
| 5 | 0,1600 | 0,1633 | 0,1662 | 0,1687 | 0,1708 | 0,1725 | 0,1738 | 0,1747 | 0,1753 | 0,1755 |
| 6 | 0,1093 | 0,1143 | 0,1191 | 0,1237 | 0,1281 | 0,1323 | 0,1362 | 0,1398 | 0,1432 | 0,1462 |
| 7 | 0,0640 | 0,0686 | 0,0732 | 0,0778 | 0,0824 | 0,0869 | 0,0914 | 0,0959 | 0,1002 | 0,1044 |
| 8 | 0,0328 | 0,0360 | 0,0393 | 0,0428 | 0,0463 | 0,0500 | 0,0537 | 0,0575 | 0,0614 | 0,0653 |
| 9 | 0,0150 | 0,0168 | 0,0188 | 0,0209 | 0,0232 | 0,0255 | 0,0281 | 0,0307 | 0,0334 | 0,0363 |
| 10 | 0,0061 | 0,0071 | 0,0081 | 0,0092 | 0,0104 | 0,0118 | 0,0132 | 0,0147 | 0,0164 | 0,0181 |
| 11 | 0,0023 | 0,0027 | 0,0032 | 0,0037 | 0,0043 | 0,0049 | 0,0056 | 0,0064 | 0,0073 | 0,0082 |
| 12 | 0,0008 | 0,0009 | 0,0011 | 0,0013 | 0,0016 | 0,0019 | 0,0022 | 0,0026 | 0,0030 | 0,0034 |
| 13 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0008 | 0,0009 | 0,0011 | 0,0013 |
| 14 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 |
| 15 | | | | | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 |



### Conexiones con las TIC

La tabla que se muestra en esta página es una parte de la tabla completa. Si necesitas obtener más valores, te sugerimos **descargar** la tabla completa del siguiente enlace:

*bit.ly/2vA8hAN*

*Tablas Estadísticas*

- Tabla-T1: Distribución Binomial
- Tabla-T2: Distribución de Poisson
- Tabla-T3: Distribución Normal Estándar
- Tabla-T4: Distribución $\chi^2$
- Tabla-T5: Distribución t de Student
- Tabla-T6: Distribución F.

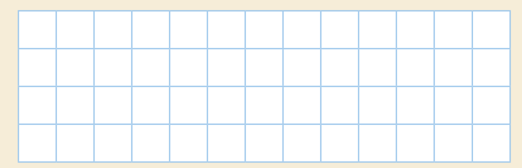
Tabla de distribución de Poisson, tomada de: http://ocw.ub.edu/admistracio-i-direccio-dempreses/ estadistica-empresarial-i/fitxers/temes/ TABLAS-ESTADISTICAS.pdf

# Taller práctico

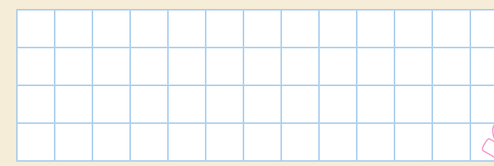
DCCD: M.5.3.18. Identificar variables aleatorias discretas en problemas de texto y reconocer la distribución de Poisson, como ejemplo de variables aleatorias discretas y sus aplicaciones.

**1** **Determina** las siguientes probabilidades:

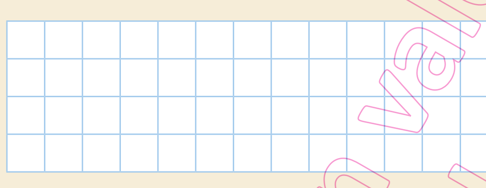
a) Si $\lambda = 4$, ¿a qué es igual $P(X = 2)$?



b) Si $\lambda = 2{,}5$, ¿a qué es igual $P(X = 3)$?

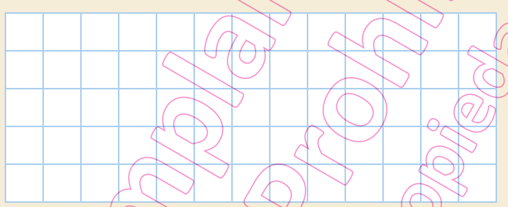


c) Si $\lambda = 3{,}6$, ¿a qué es igual $P(X = 7)$?

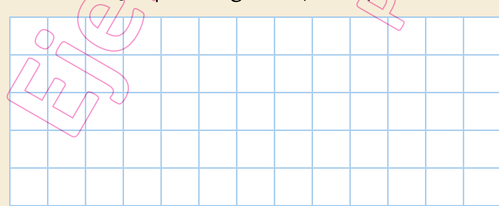


**2** **Calcula** las siguientes probabilidades:

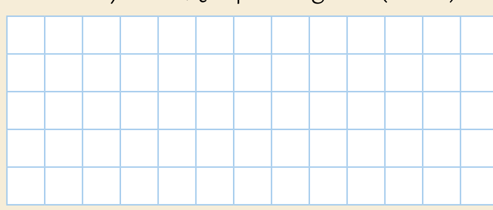
a) Si $\lambda = 3$, ¿a qué es igual $P(X < 2)$?



b) Si $\lambda = 3$, ¿a qué es igual $P(X \leq 2)$?

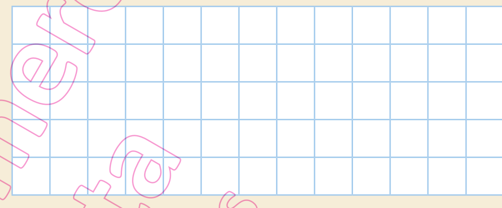


c) Si $\lambda = 3$ y $n = 5$, ¿a qué es igual $P(X > 2)$?

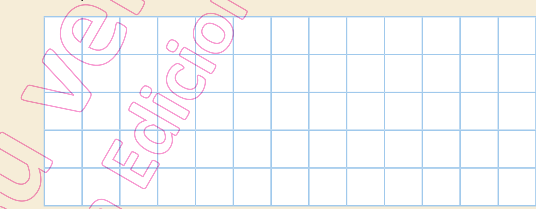


**3** **Resuelve** el siguiente problema.
Un comerciante de naranjas tiene conocimiento de que el 3 % del cargamento está dañado. Si una compradora elige 100 naranjas al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 naranjas estén dañadas?

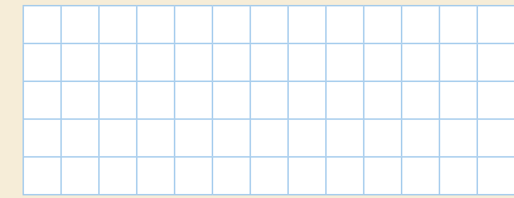


b) ¿Cuál es la probabilidad de que de 1 a 3 naranjas estén dañadas?

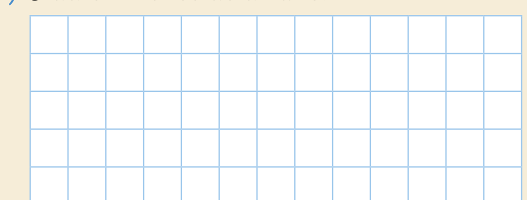


**4** **Encuentra** la solución utilizando la distribución de Poisson.
La probabilidad de que una *flash memory* dure al menos un año sin que falle es de 0,95. **Calcula** la probabilidad de que en una muestra de 20:

a) 12 duren al menos un año.



b) 5 duren menos de un año.

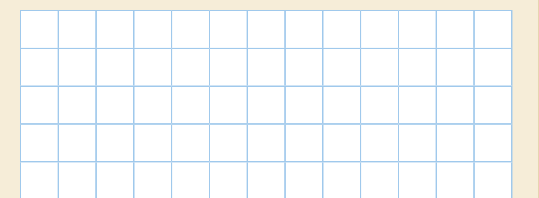


c) Al menos 2 duren menos de un año.

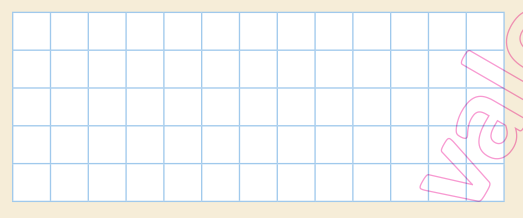
**5** **Resuelve**

Supongamos que 8 de 100 casas no cumplen con las normas básicas de construcción. Cuál es la probabilidad de que un inspector de la construcción seleccione aleatoriamente 40 de ellas y descubra que:

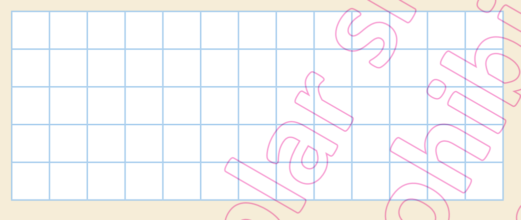
a) Ninguna de las casas incumple las normas de construcción.



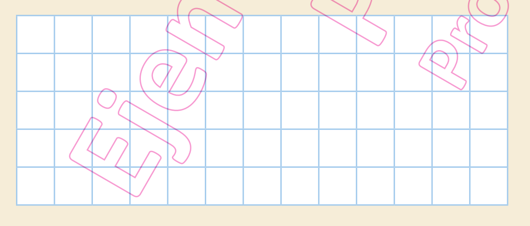
b) Una casa incumpla las normas de construcción.



c) Dos casas no cumplan con las normas de construcción.



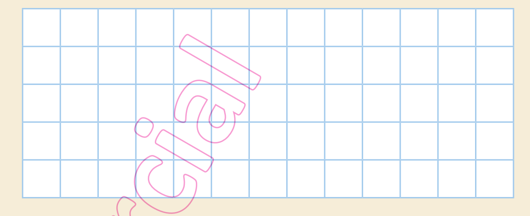
d) Al menos tres casas incumplan las normas de construcción.



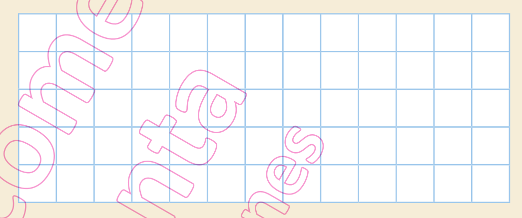
**6** **Resuelve**

Se ha determinado que para abastecerse de combustible, los vehículos llegan a una gasolinera siguiendo una distribución de Poisson de parámetro 1,6. **Calcula** la probabilidad de que:

a) El número de vehículos que llega sea superior a 3.



b) Esté comprendido entre 2 y 5.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando trabajamos con estudiantes con alguna necesidad educativa especial es necesario habilitar espacios de tiempo flexibles para el refuerzo en la asignatura.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan.**

**7** La variable $X$ sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 0{,}5$. **Hallen**:

a) $P(X = 1)$. b) $P(X \leq 2)$. c) $P(X > 3)$.

**8** Una entidad bancaria recibe por día en promedio 6 cheques sin fondo. Cuáles son las probabilidades de que reciba:

a) 5 cheques sin fondo en 1 día dado.
b) 15 cheques sin fondo en cualquiera de 2 días consecutivos.

**9** El 8 % de registros contables de una empresa presentan algún problema. Si una auditora toma una muestra de 40 registros, ¿cuál es la probabilidad de que existan 5 registros con problemas?

# Solución de problemas cotidianos

## Agencia de viajes

**1.** Una agencia de viajes ofrece un premio entre los distribuidores si venden 320 o más paquetes de viajes por día. Sabemos que el número de paquetes de viajes vendidos al día por los distribuidores "Viajes" y "Placer" siguen una ley normal de la forma siguiente:



Shutterstock, (2020). 266693240

▲ Viajes y turismo.

| Distribuidor | Media | Desviación típica |
|---|---|---|
| "Viajes" | 290 paquetes de viaje | 20 paquetes de viaje |
| "Placer" | 300 paquetes de viaje | 10 paquetes de viaje |

Fuente: archivo editorial, (2020).

Se pide:

a) El porcentaje de los días que obtendrá premio el distribuidor "Viajes".

b) El porcentaje de los días que obtendrá premio el distribuidor "Placer".

c) ¿A qué distribuidor beneficia la decisión de la agencia?

**Análisis de datos**

Se trata de una distribución normal en la que para el primer caso se tiene N(290, 20) y para el segundo caso se tiene N(300, 10).

**Modelización**

a) Para resolver el literal a), consideramos:

X = "número de paquetes de viajes vendidos por el distribuidor 'Viajes' al día"

N(290, 20)

Para obtener el premio, el porcentaje de días debe ser mayor o igual que 320.

$$P(X \geq 320) = P\left(\frac{X-290}{20} \geq \frac{320-290}{20}\right)$$

$$= P(Z \geq 1{,}5) = 0{,}068\ 8$$

**Interpretación**

El 6,68 % de los días obtendrá premio el distribuidor "Viajes".

**Modelización**

b) Para resolver el literal b), procedemos de la misma manera.

X = "número de paquetes de viajes vendidos por el distribuidor 'Placer' al día".

N(300, 10)

$$P(X \geq 320) = P\left(\frac{X-300}{10} \geq \frac{320-300}{10}\right)$$

$$= P(Z \geq 2) = 0{,}022\ 8$$

**Interpretación**

El 2,28 % de los días obtendrá premio el distribuidor "Placer".

c) Del cálculo de la probabilidad, se observa que el distribuidor "Viajes" resulta beneficiado de la decisión de la agencia.

**[ Practica en tu cuaderno ]**

2. El tiempo en horas empleado en elaborar un producto sigue una distribución N(10, 2). Cuál es la probabilidad de que ese producto tarde en ser elaborado:
   a) menos de 6 horas.
   b) entre 8 y 12 horas.

3. En una empresa se requiere contratar personal calificado. La directora de Recursos Humanos realiza una prueba de 10 ítems a los aspirantes a un puesto, teniendo en cada ítem 4 posibles respuestas, de las que solo 1 es correcta. Suponiendo que los aspirantes tienen la misma probabilidad de responder, cuál es la probabilidad de que:
   a) contesten todos los ítems mal.
   b) contesten al menos 4 ítems bien.
   c) contesten entre 4 y 6 ítems bien.
   d) contesten todos los ítems bien.
   e) contesten menos de 3 ítems bien.

4. El 30 % de un determinado pueblo ve un concurso por televisión. Desde los estudios donde se realiza el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo, elegidas al azar. Cuál es la probabilidad de que, entre las 10 personas, estuvieran viendo el programa:
   a) más de 8 personas.
   b) algunas de las 10 personas.
   c) ¿Cuál es la media y la desviación típica?

Estos problemas han sido adaptados de: http://www.estadistica.net/Aeronautica2016/ejer-distribuciones.pdf

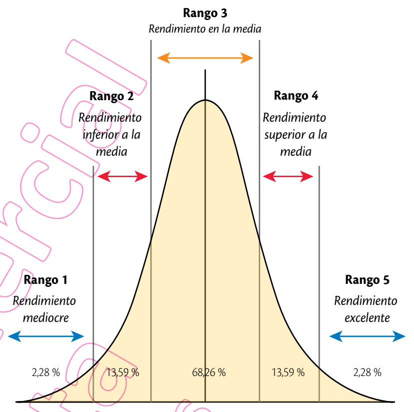
# Matemática y evaluación del aprendizaje

¿Qué tiene que ver la matemática con la evaluación del aprendizaje? Pues en realidad mucho, ya que al analizar la evaluación de desempeño o de aprendizaje, inmediatamente se hace referencia a un modelo normal de distribución de calificaciones.

Sin embargo, debe entenderse que el modelo normal es aplicable solo en aquellos casos en que las calificaciones deben responder a la necesidad de orden a un determinado grupo de individuos de "excelentes" a "deficientes", situación que hace referencia a la nota obtenida, mas no a los procesos de aprendizaje que valoran y enfatizan la forma y dificultades que el estudiante tiene en el proceso.

Si bien es cierto que la distribución normal nos permite tener un aprendizaje del grupo de trabajo como docentes, esto no implica que sea el único recurso para reflexionar sobre la labor docente en el aula. Es un parámetro, pero existen otros factores que se deben tomar en cuenta al momento de realizar la evaluación del aprendizaje.

Adaptado de: http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07051997000100005




▲ Distribución normal de un ejemplo de rendimiento.

▲ Figura 3.24.

## La matemática y las profesiones

# Licenciatura en Matemática

La matemática provee un lenguaje riguroso con el que pueden expresarse de manera precisa, clara y desprovista de ambigüedades e inconsistencias, las relaciones internas de las teorías que tratan acerca de la naturaleza, de la sociedad y del comportamiento de las personas.

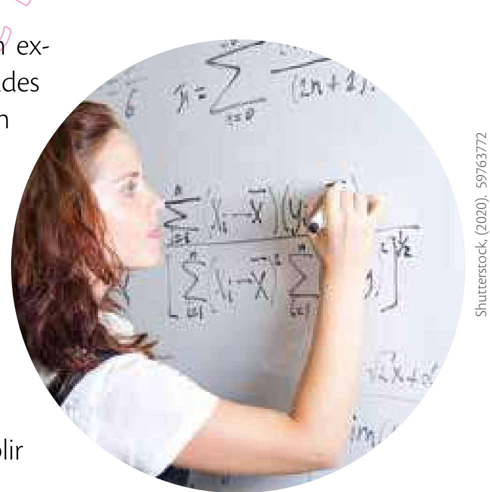
La matemática tiene como finalidad el estudio de las estructuras más generales del pensamiento lógico. Son características de esta, su poder de análisis y síntesis, la riqueza en conceptos, procesos y múltiples herramientas que pueden aplicarse a disciplinas tan diversas como las ingenierías, las ciencias naturales e inclusive el arte.

Los postulantes a una Licenciatura en Matemática deberán cumplir con el siguiente perfil:

- Bachiller en Ciencias o Bachillerato General Unificado.
- Manejo de herramientas informáticas.
- Capacidad para resolver problemas de índole matemática y física.
- Predisposición a la investigación; tener alto grado de hábitos de estudio.

La duración de la carrera es de ocho semestres y el campo ocupacional está relacionado con instituciones de nivel medio, así como con el ámbito de la investigación.

Adaptado de: http://www.universia.com.ec/estudios/usfq/licenciatura-matematicas/st/172789



Shutterstock, (2020). 59763772

▲ Licenciada en Matemática.

# Problemas de distribución binomial con GeoGebra

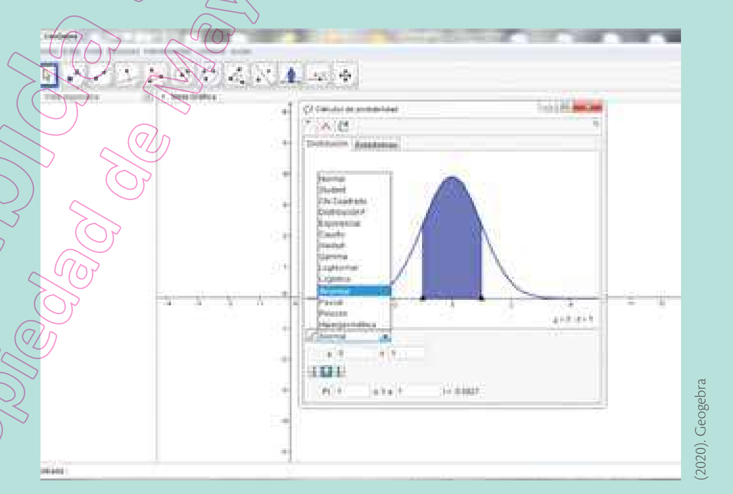
La probabilidad de que al administrarle un antibiótico a cierto tipo de ave rapaz, este presente una reacción negativa es 0,05. Si la muestra de aves es 80, **analiza** la probabilidad de que:

1. en ningún ave haya reacción negativa;
2. haya reacción negativa en al menos 2 aves;
3. 5 aves hayan tenido reacción negativa.

Para resolver un problema de distribución binomial, una vez activado GeoGebra en el menú ABC, **escoge** la opción: *Cálculo de probabilidades.*

(2020). Geogebra

Una vez activada esta opción, en la casilla inferior izquierda *Normal*, **da** clic en el menú que se despliega y **escoge** la opción *Binomial.*



(2020). Geogebra

**Analiza** los datos del problema como la muestra $n = 80$ y la probabilidad $p = 0,05$. **Ingresa** en las celdas n 80 p 0.05.

Se despliega $\mu$ y $\sigma$, la gráfica y la tabla de valores correspondiente.



(2020). Geogebra

Para analizar las condiciones del problema, **elige** una de las opciones en el ícono ] [ ] [. Para la primera pregunta, **escribe** P( 0 ≤ X ≤ 0 ) = 0.0165.

Se desplegará la probabilidad, la porción del gráfico que cumple la condición planteada, y en la tabla de valores se resaltará la población afectada.

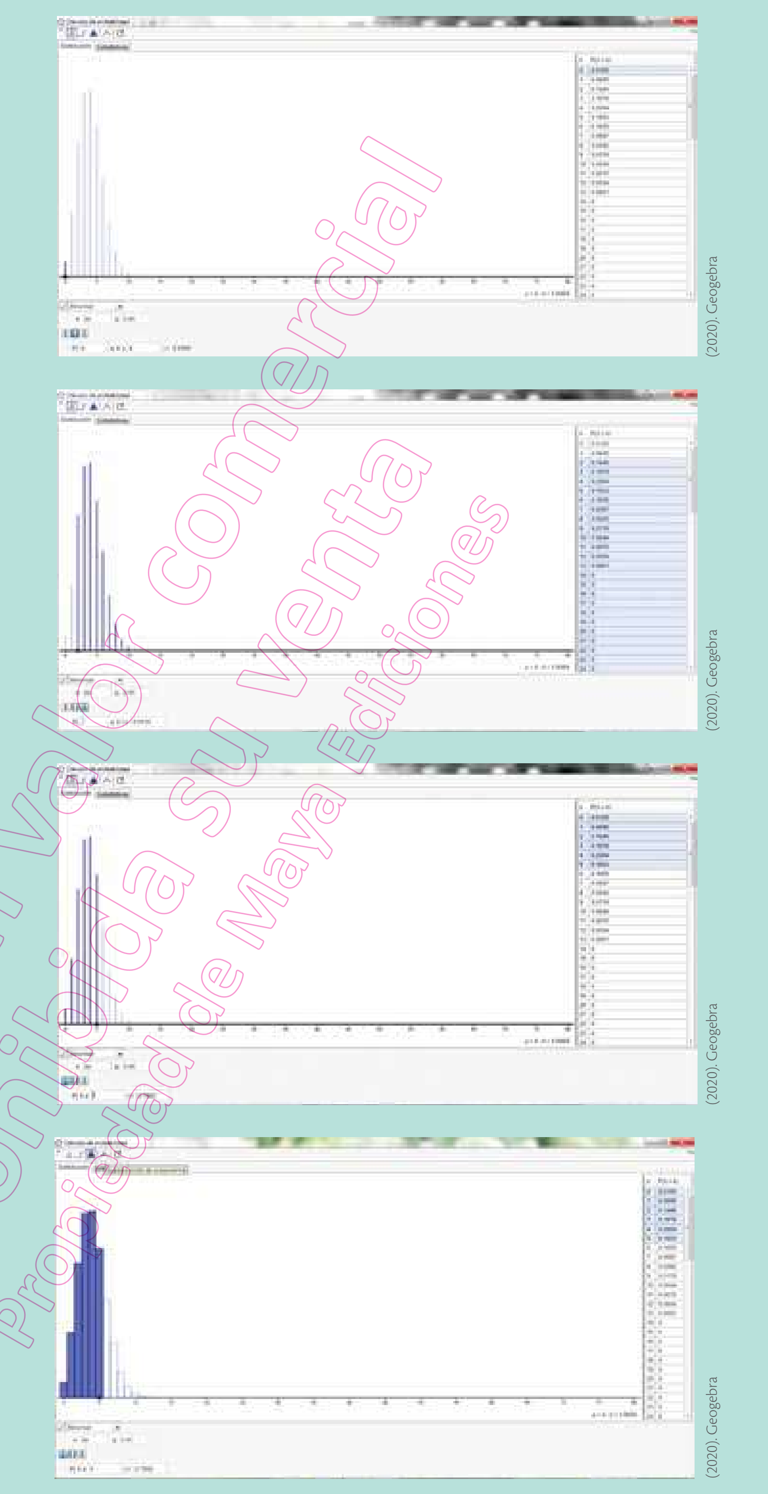
Para la segunda pregunta, **escoge** la opción ] [ ] [ y **escribe** P( 2 ≤ X ) = 0.9139.

De igual manera, se desplegarán la probabilidad, el área de pertinencia y los valores sombreados.

Para la tercera pregunta, **elige** ] [ ] [ y **escribe** P( X ≤ 5 ) = 0.7892.

**Observa** la zona de afección en la gráfica y en la tabla de valores.

Para apreciar otros tipos de gráficos, **elige** una de las opciones que se encuentra en la parte izquierda superior. Presionando en el icono, la página donde se analizan las probabilidades se integra a la pantalla principal de GeoGebra. Antes de este procedimiento, **observa** la barra de trabajo. Puedes apreciar dos hojas de trabajo. Luego de esta acción, observarás una.


(2020). Geogebra
(2020). Geogebra
(2020). Geogebra
(2020). Geogebra



## Practica

**1.** Un agente de seguros vende pólizas a 8 personas, cuya salud es buena y sus edades son las mismas. En un análisis demográfico, la probabilidad de que una persona viva 30 años o más con buena salud es $\frac{2}{3}$. **Determina** la probabilidad de que, transcurridos 30 años, se encuentre(n) con buena salud:

**a)** toda la muestra;

**b)** al menos 3 personas;

**c)** exactamente 4 personas.

# Desafíos y proyectos matemáticos

## Tema: Las sucesiones en el entorno

**Recursos**

- Calculadora, *tablet*, celular, computadora con la aplicación GeoGebra.

### Objetivos

- Utilizar la teoría de sucesiones para demostrar la utilidad de la matemática.
- Construir documentos y diseñar una exposición con distintos objetos que evidencien la utilidad de las sucesiones.
- Utilizar GeoGebra para demostrar cómo se construyen sucesiones, y cuál es su comportamiento en el plano.
- Proporcionar información acerca de las sucesiones y de la sucesión de Fibonnaci en medios escritos.


Shutterstock, (2020). 224222065

▲ Trabajo en equipo.

### Justificación

Una sucesión es una función cuyo domino son los $\mathbb{Z}^+$, y el recorrido es un conjunto de los reales $\mathbb{R}$. La medicina, la física, la economía, la cultura física y la ingeniería son algunos de los campos donde se aplica esta teoría para analizar el crecimiento de bacterias, el desarrollo de la flora, la evolución de gérmenes o virus, entre otros temas.


▲ Pavo real.

Shutterstock, (2020). 45778489

Una de las sucesiones más importantes es la **sucesión de Fibonacci**, la cual se construye empezando por la unidad. Luego, los siguientes términos son la suma de los dos anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …). El campo de mayor aplicación de esta sucesión matemática es la naturaleza.

### Actividades

- Formen equipos de tres estudiantes y elijan a una coordinadora o coordinador.
- Cada integrante consultará dónde se aplican las sucesiones en forma general, y dónde se aplica la sucesión de Fibonacci en la naturaleza y la ciencia.
- Una vez realizada la investigación, los coordinadores se reunirán para seleccionar las aplicaciones que expondrá cada equipo, de tal forma que no se repita la información en los grupos.
- Cada grupo elaborará carteles explicativos de lo investigado, y folletos para repartir entre sus compañeras y compañeros.
- Adquieran elementos como una piña, una alcachofa, un brócoli, una coliflor, celdas de un panal de abejas, girasoles, margaritas, cartuchos, primaverillas, tradescantias, entre otros.
- Elaboren una feria para explicar cómo se generan las sucesiones, cómo estas se encuentran presentes en la naturaleza y cómo, a partir de estos conceptos, la arquitectura ha podido crear hermosas edificaciones.
- Reproduzcan videos interactivos (por ejemplo: ***https://www.youtube.com/watch?v=A1KwKkh-03c***).
- Con el programa GeoGebra, construyan otras sucesiones y verifiquen la monotonía, dominio y recorrido.
- Elaboren un informe de los logros alcanzados en esta actividad y un resumen de sus conclusiones.

### Conclusiones

- Las sucesiones permiten resolver problemas de mayor complejidad.
- A partir de las sucesiones, se pueden demostrar fenómenos en la naturaleza y en la vida cotidiana.
- No se debe confundir el concepto de sucesiones con el de series numéricas.

# En síntesis

## Álgebra y funciones

## Estadística y probabilidad


Shutterstock, (2020). 247038415

▲ Semillas de girasol.


Shutterstock, (2020). 196289447

▲ Resplandor de la mañana.

### Álgebra y funciones

- Sucesiones convergentes. Límite de una sucesión
  - Álgebra de sucesiones convergentes
  - Definición de sucesiones convergentes
  - Propiedades de los límites de sucesiones convergentes

### Estadística y probabilidad

- Distribución binomial o de Bernoulli $B(n, p)$
  - Definición. Uso de tablas
  - Probabilidad acumulada
- Distribución normal $X \equiv N(\mu, \sigma)$
  - Definición. Uso de tablas N(0, 1)
  - Tipificación. Cálculo de probabilidades con distribución normal
- Distribución de Poisson $X \sim Ps(\lambda)$
  - Características de la distribución. Función de probabilidad
  - Lectura de tablas de la distribución de Poisson

# Evaluación sumativa

**[Heteroevaluación]**

M.5.4.1. Identifica las sucesiones según sus características y halla los parámetros desconocidos; aplica progresiones en aplicaciones cotidianas y analiza el sistema financiero local, apreciando la importancia de estos conocimientos para la toma de decisiones asertivas. (J.2.)

**1** **Calcula** $\lim_{n\to\infty} a_n$ para $a_n$, que se define en cada ítem.

a) $a_n = \dfrac{4-3n}{11n+1}$.

b) $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+25}{4n^2+9}}$.

c) $a_n = \dfrac{1}{n^2+n} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

d) $a_n = \dfrac{5n+1}{3n^2+10} - \dfrac{n^2+5n+2}{7n^2+n+1} + \dfrac{1}{7}$.

**2** En cada ítem se define una sucesión de funciones $(f_n)$. **Representa** gráficamente las primeras cuatro funciones. Para el efecto, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, **elabora** una tabla de valores de $f_n(x)$, $x \in Dom(f_n)$, y con estos, **construye** cada gráfica.

a) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{n^2+1}$, $\quad x \in [0, \infty[$,
$n = 0, 1, 2, \cdots$.

b) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n+4}}{x^2}$, $\quad x \in [1, \infty[$,
$n = 0, 1, 2, \cdots$.

**3** Sea $(f_n)$ la sucesión definida como $f_n(x) = ((-1)^n + 1)x \quad x \in [0, 2], n = 0, 1, 2, \cdots$. **Representa** gráficamente las primeras cinco funciones. Para el efecto, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, **elabora** una tabla de valores de $f_n(x)$, y con estos, **construye** cada gráfica. Luego, **estudia** las sucesiones numéricas reales siguientes:

a) $(f_n(0))$.

b) $\left(f_n\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$.

c) $(f_n(0))$.

d) $(f_n(2))$.

Para $n$ suficientemente grande, ¿qué sucede con cada término de la sucesión de funciones $(f_n)$? **Explica** tu respuesta en forma intuitiva.

I.M.5.10.2. Identifica variables aleatorias discretas y halla la media, varianza y desviación típica; reconoce un experimento de Bernoulli y la distribución binomial para emplearlos en la resolución de problemas cotidianos y el cálculo de probabilidades; realiza gráficos con el apoyo de las TIC. (I.3.)

**4** Se reparten unas invitaciones sabiendo que el 40 % de los invitados asistirán al acto. Se seleccionan al azar 10 invitados. **Calcula:**

a) La probabilidad de que solo 3 acudan al acto.

b) La probabilidad de que acudan más de 3.

**5** **Halla** en una distribución $N(0, 1)$ las siguientes probabilidades:

a) $P[Z > -0{,}2]$.

b) $P[Z > 1\ ,27]$.

c) $P[-0{,}52 < Z < 1{,}03]$

d) $P[Z < 0{,}25]$.

**6** Para preparar un pastel para un matrimonio el tiempo empleado en horas sigue una distribución normal N (8, 2). ¿Cuál es la probabilidad de que se tarde el panadero en prepararlo?

a) Menos de 6 horas

b) Entre 4 y 6 horas

**Resuelve** cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

**7** **Considera** la sucesión $(a_n)$ definida como $a_n = \frac{5n^2+3n}{2n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. **Determina** el límite de esta sucesión.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{3}$

**8** ¿Cuál de las siguientes propiedades de los límites de sucesiones convergentes es errónea?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n - \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} b v_n$.

d) $bn \neq 0$, n = 1,2, ..., y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

**9** Las ventas diarias, en dólares, en un determinado comercio siguen una distribución N(950, 200). **Calcula** la probabilidad de que las ventas diarias en ese comercio:

i) superen los 1 200 dólares

a) 10,56 %. c) 15,5 %.
b) 14,82 %. d) 8,72 %.

ii) estén entre 700 y 1 000 dólares

a) 20 %. c) 45 %.
b) 30 %. d) 44 %.

**10** **Utiliza** la distribución de Poisson y **resuelve**.
Se determina que en una ciudad, el 20 % de las personas tiene un problema visual. Si se toma una muestra de 50 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 10 de ellas tengan un problema en la vista?

a) 12,5 %. c) 15 %.
b) 10 %. d) 15,5 %.

**[Autoevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Identifico a las sucesiones y sus características. | | | |
| Determino el límite de una sucesión de forma efectiva. | | | |
| Distingo entre un experimento de Bernoulli y uno de distribución binomial. | | | |
| Utilizo la distribución de Poisson para resolver problemas. | | | |

**[Coevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Trabajamos en equipo y todos aportamos para la solución de problemas. | | | |
| La participación grupal nos permite conocernos y valorarnos con nuestras virtudes y fortalezas. | | | |

**[Metacognición]**

a) ¿En qué te puede servir una distribución de Bernulli?

b) ¿Qué sección de esta unidad te gustó más?

# Función exponencial y logarítmica

## Fenómenos naturales y logaritmos

Las aplicaciones de las ecuaciones logarítmicas en la explicación de fenómenos naturales son múltiples, por ejemplo, para medir la intensidad del sonido en música, para determinar la intensidad de los movimientos sísmicos en geología, para obtener la data de restos arqueológicos en la paleontología, para determinar el nivel de acidez de determinados productos en química, entre otros.

Adaptado de: http://matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/temas_11no/17_Ecuaciones_e_inecuaciones_logaritmicas_web.publi/web/co/17_Ecuaciones_e_inecuaciones_logaritmicas_2.html



## Observa y contesta

- ¿Cómo crees que obtienen los antropólogos el número de años de un fósil encontrado?
- ¿Cómo crees que se realiza el estudio el estudio del crecimiento de una bacteria?

Shutterstock, (2020). 549966529

Shutterstock, (2020). 303862733



# 4 unidad

**Bloques curriculares**
Álgebra y funciones

## Objetivos

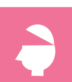
- O.G.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- O.G.M.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.
- O.G.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Ministerio de Educación, (2016).



**Saberes previos**

¿Cómo se llaman estas funciones:
$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R}$?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Cuáles son las propiedades de la potenciación cuando las bases $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos y los exponentes $m, n \in \mathbb{R}$?



**Recuerda que...**

Las propiedades i) a vii) de la función exponencial de base $a$ y de variable entera también se verifican para la función exponencial de base $a$ y de variable racional.
Nota que
$r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}$
con $n \neq 0$, tal que $r = \frac{m}{n}$,
$v(r) = a^r = a^{\frac{m}{n}}$
$= (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$.

El grafo de $v$ es el conjunto $G(v) = \{(r, a^r) \mid r \in \mathbb{Q}\}$.

Escribe las propiedades de $a^r$ con $r \in \mathbb{Q}$ y $a > 0$, $a \neq 1$.

# Función exponencial. Propiedades

Dos funciones muy importantes que intervienen en muchos campos de la ciencia, la industria y el comercio son la exponencial y la logarítmica, una inversa de la otra, que nos proponemos estudiar a continuación.

**Definición.** Sea $a > 0$ con $a \neq 1$ fijo. La función $u: \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ n \to a^n \end{cases}$ se llama función exponencial de base $a$ y de variable entera.

**Propiedades**

i) $u(0) = a^0 = 1$.

ii) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $u(n) = a^n > 0$.

iii) Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, $u(m + n) = a^{m+n} = a^m a^n = u(m)u(n)$.

iv) Si $a > 1$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, tal que $n_1 < n_2$, entonces $u(n_1) = a^{n_1} < a^{n_2} = u(n_2)$, es decir que la función $u$ es creciente.

v) Si $0 < a < 1$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, tal que $n_1 < n_2$, se tiene $u(n_1) = a^{n_1} > a^{n_2} = u(n_2)$, esto es, la función $u$ es decreciente.

vi) Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, el número real $u(n) = a^n$ es tan grande como se quiera según $n$ lo sea, y $u(-n) = a^{-n}$ es positivo y tan pequeño como se quiera para $n$ suficientemente grande.

vii) Para $0 < a < 1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, el número real $u(n) = a^n$ es tan pequeño como se quiera para $n$ suficientemente grande, y $u(-n) = a^{-n}$ es tan grande según $n$ también lo sea.

El grafo de $u$ es el conjunto discreto $G(u) = \{(n, a^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

*Ejercicio resuelto*

Consideremos la función definida como $u(n) = 5^n$; $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos $u(0) = 5^0 = 1$, $u(n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, más aún, $u(n) = 5^n \geq 5$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$,

$$0 < u(-n) = 5^{-n} = \frac{1}{5^n} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Verifiquemos que $u$ es estrictamente creciente. Para $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, tal que $n_1 < n_2$, existe $p \in \mathbb{Z}^+$, tal que $n_2 = p + n_1$. Luego,

$$u(n_2) = 5^{n_2} = 5^{p+n_1} = 5^p u(n_1).$$

Como $5^p > 1$, se sigue que $u(n_1) < u(n_2)$. Así, $n_1 < n_2 \Rightarrow u(n_1) < u(n_2)$.

El grafo de $u$ es el conjunto $G(u) = \{(n, 5^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Sea $a > 0$ con $a \neq 1$ fijo. La función $v: \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \\ r \to v(r) \to a^r \end{cases}$

se llama función exponencial de base $a$ y de variable racional (variable independiente).

## Potenciación con exponentes reales

Sea $a > 0$ con $a \neq 1$ fijo. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ¿cómo se define $a^x$? ¿Qué significado atribuimos a $a^x$?

Consideramos, por ejemplo, $2^{\sqrt{2}}$. Tomando aproximaciones de $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2} \cong 1{,}414\,213\,562$), tenemos las siguientes:

$$2^{1,41} \cong 2{,}657\,376\,28,$$
$$2^{1,4142} \cong 2{,}665\,119\,089,$$
$$2^{1,414213} \cong 2{,}665\,143\,104,$$
$$2^{1,41421356} \cong 2{,}665\,144\,138,$$
$$\vdots$$
$$2^{\sqrt{2}} \cong 2{,}665\,144\,143.$$

En definitiva, consideramos aproximaciones de $2^{r_m}$ siendo $(r_m)$ una sucesión de números racionales que son aproximaciones de $\sqrt{2}$ y que convergen a $\sqrt{2}$, de modo que, en forma intuitiva,

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{m\to\infty} 2^{r_m}, \text{ y } r_m \underset{m\to\infty}{\to} \sqrt{2}.$$

Observa que $r_m \in \mathbb{Q}$ y $2^{r_m}$ están bien definidos.

De manera general, $a^x$ se aproxima con una sucesión de números reales de la forma $a^{r_m}$, siendo $r_m \in \mathbb{Q}$ aproximación de $x$, de modo que $r_m$ converge a $x$ para $m$ que tiende al infinito.

**Definición.** Sea $a > 0$, $a \neq 1$ fijo. La función $f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, definida como

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

se llama función exponencial de base $a$.
$Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \,]0, \infty[$.

*Ejercicios resueltos*

1. Considerar la función $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to f(x) = 2^x \end{cases}$. Tenemos $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = \,]0, \infty[$. El grafo de $f$ es el conjunto $G(f) = \{(x, 2^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   Algunos valores de $f$ se muestran en la tabla. Con dichos valores obtenemos algunos puntos de $G(f)$.

$$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = 0{,}125;\ f(0) = 2^0 = 1;\ f(3) = 2^3 = 8.$$

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2^x$ | 0,125 | 0,25 | 0,50 | 1 | 2 | 4 | 8 |

Nota que si $n > 1$ suficientemente grande, $f(n) = 2^n$ es tan grande como se quiera, y $f(n) = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ se aproxima a cero como se quiera.

**Recuerda que...**

En la Figura 4.1. se representa la gráfica de $v$ cuando $0 < a < 1$.

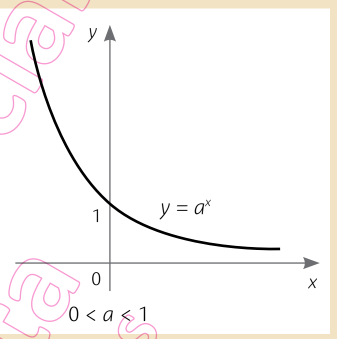



Figura 4.1.

En la Figura 4.2. se representa la gráfica de $v$, $a > 1$.

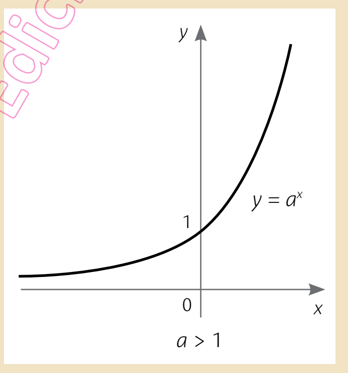



Figura 4.2.

A la función exponencial de base $a$ se le denota también $Exp_a$, esto es,

$$Exp_a: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to exp_a(x) = a^x. \end{cases}$$

Las propiedades que hemos precisado para la función $v(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$ se verifican para la función $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$.

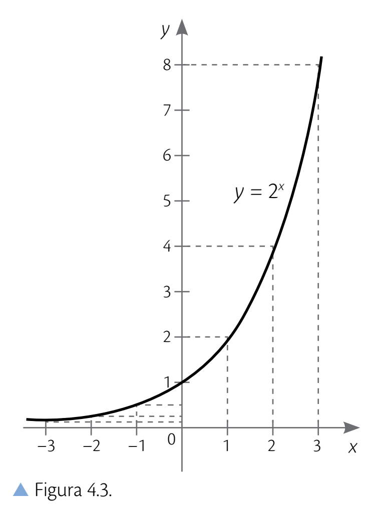



Figura 4.3.

El grafo de $f$ es el conjunto $G(f) = \{(x, 2^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Observa que la gráfica de $f$ se extiende hacia arriba en la medida en que $x > 0$ sea suficientemente grande. Por otro lado, la gráfica se aproxima al eje $x$ tanto como se quiera, en la medida en que $-x$ sea muy grande, con $x < 0$.

La función $f$ es estrictamente creciente, y se evidencia en la Figura 4.3. de $f$. Además, esta es una función biyectiva.

### Demostración de biyección

i) **Inyectiva**

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$. Existe $p \in \mathbb{R}^+$, tal que $x_2 = x_1 + p$. Luego,

$$2^{x_2} = 2^{x_1+p} = 2^p 2^{x_1},$$

y como $2^p > 1$, de esta igualdad se deduce $2^{x_1} > 2^{x_2}$.

ii) **Sobreyectiva**

Sea $y \in \mathbb{R}^+$. Halla $x \in \mathbb{R}$, tal que $y = 2^x$. Admitimos que esta ecuación siempre tiene solución en $\mathbb{R}$, a la que notamos $\hat{x}$.

Como la función es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que es biyectiva.

**Eje transversal**

**Ciudadanía**

El censo del año 2011 confirmó que en Ecuador la población aproximada era de 14 388 000. Estudios realizados por el INEC manifiestan que la tasa de crecimiento aproximada es del 2,19 %. Para que los gobiernos locales, regionales y nacionales apliquen programas equitativos de distribución de bienes y servicios, deben utilizar modelos exponenciales que les permitan conocer el crecimiento y decrecimiento poblacional.



Shutterstock, (2020). 522445369

Gráfico de crecimiento poblacional.

2. Sea $f$ la función real definida como $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to f(x) = \dfrac{1}{2^x} \end{cases}$.

Tenemos $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = ]0, \infty[$ y el grafo de $f$

$$G(f) = \left\{\left(x, \frac{1}{2^x}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}.$$

En la tabla se muestran algunos puntos.

| $x$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = \frac{1}{2^x}$ | 8 | 4 | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,125 |

En la Figura 4.4. se muestra la gráfica de esta función. Para $n > 1$ tan grande como se quiera, $f(n) = \dfrac{1}{2^n}$ es tan pequeño como se quiera, mientras que $f(-n) = \dfrac{1}{2^{-n}} = 2^n$ es tan grande como se quiera.

La función $f$ es decreciente, lo que se evidencia en la gráfica de esta función.

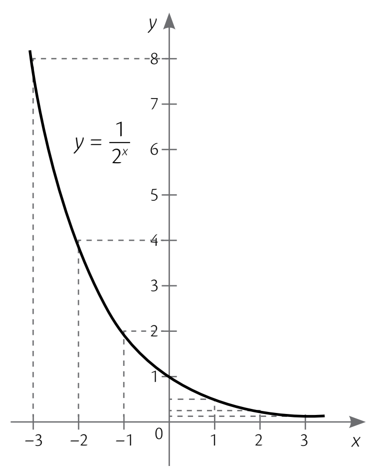



Figura 4.4.

## Función exponencial de base *e*

Una función importantísima que aparece en muchos cálculos es la función exponencial de base *e*. Este número es el límite de la sucesión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, esto es,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^n\right],$$

o también: $e = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!} = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \ldots,$

cuya aproximación es $e \simeq 2{,}7182818284$.

La función $Exp\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to f(x) = e^x\end{cases}$ se llama función exponencial de base *e*.

A la izquierda se muestran algunos valores de esta función, mientras que a la derecha se muestra una porción de la gráfica de *Exp*. (Figura 4.5.).



**Recuerda que...**

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ se desarrolla con el Binomio de Newton y para *n* suficientemente, grande $\dfrac{1}{n}$ se aproxima a 0.

La función exponencial con base *e* también se escribe como *exp*(*x*).

$Exp: \begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to exp(x) = e^x.\end{cases}$

Esta función tiene propiedades similares a la función $f(x) = 2^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

| $x$ | $exp(x)$ |
|---|---|
| 0 | $exp(0) = 1$ |
| 0,1 | $exp(0{,}1) = e^{0{,}1} \simeq 1{,}105\ 170\ 918$ |
| 0,5 | $exp(0{,}5) = \sqrt{e} \simeq 1{,}648\ 721\ 271$ |
| 1 | $exp(1) = e \simeq 2{,}718\ 281\ 828\ 4$ |
| 1,5 | $exp(1{,}5) = e^{1{,}5} \simeq 4{,}481\ 689\ 07$ |
| −0,2 | $exp(-0{,}2) = e^{-0{,}2} \simeq 0{,}818\ 730\ 753\ 1$ |
| −0,5 | $exp(-0{,}5) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0{,}606\ 530\ 659\ 6$ |
| −1 | $exp(-1) = e^{-1} \simeq 0{,}367\ 879\ 441\ 2$ |

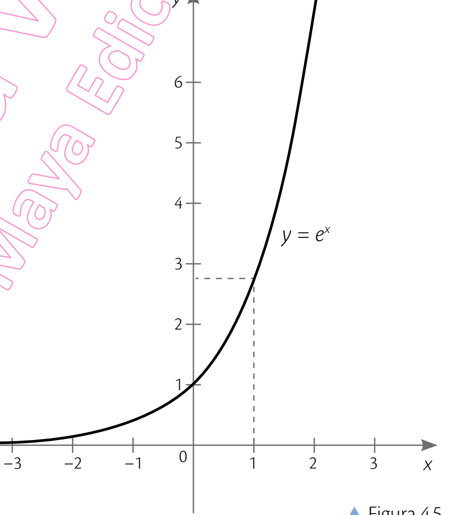



Figura 4.5.

En la Figura 4.6. se muestran las gráficas de las funciones exponenciales de bases 2, 3 y 10, respectivamente notadas $u(x) = 2^x$, $v(x) = 3^x$, $w(x) = 10^x$ $x \in \mathbb{R}$.

Para $x > 0$ se verifican $2^x < 3^x < 10^x$, y $10^{-x} < 3^{-x} < 2^{-x}$.

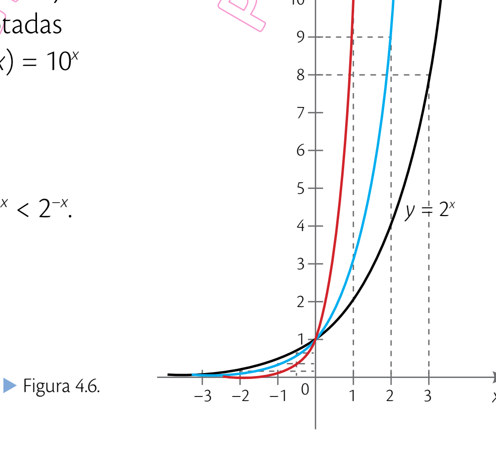



Figura 4.6.

**Interdisciplinariedad**

**Matemática y concentración de alcohol**

Es posible medir la concentración del alcohol en la sangre de una persona mediante la utilización de una función exponencial determinada por

$$r = 6e^{kx},$$

donde *r* es el riesgo de tener un accidente automovilístico, *x* es la concentración de alcohol en la sangre, y *k* es una constante.

# Taller práctico

DCCD: M.5.1.74. Reconocer y graficar funciones exponenciales analizando sus características: monotonía, concavidad y comportamiento al infinito.



**1** Con el uso de una calculadora científica, **halla** aproximaciones de $2^{\sqrt{3}}$ de los siguientes números.

a) $2^{1,73} =$ ______

b) $2^{1,732\,0} =$ ______

c) $2^{1,732\,050} =$ ______

d) $2^{1,732\,050\,81} =$ ______

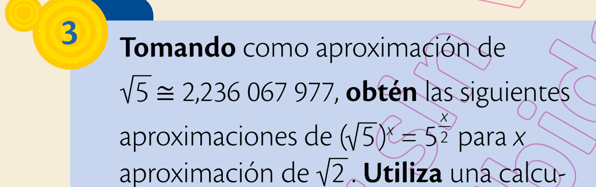


**2** **Obtén** valores aproximados de $2^{\sqrt{3}}$ y **compara** con las aproximaciones anteriores.

______

______

______



**3** **Tomando** como aproximación de $\sqrt{5} \cong 2{,}236\,067\,977$, **obtén** las siguientes aproximaciones de $(\sqrt{5})^x = 5^{\frac{x}{2}}$ para $x$ aproximación de $\sqrt{2}$. **Utiliza** una calculadora.

a) $x = 1{,}41$.

______

b) $x = 1{,}414\,2$.

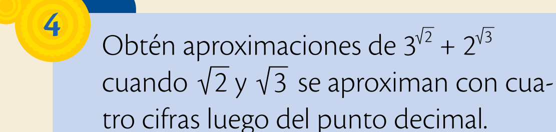
______

c) $x = 1{,}414\,243$.

______

d) $x = 1{,}414\,221\,356$.

______



**4** Obtén aproximaciones de $3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{3}}$ cuando $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ se aproximan con cuatro cifras luego del punto decimal.

______

______

**5** Sea $f$ la función real definida como

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to f(x) = 3^x. \end{cases}$$

a) **Completa** la tabla de valores que se indica.

| $x$ | $f(x) = 3^x$ | $x$ | $f(x) = 3^x$ | $x$ | $f(x) = 3^x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| −3 | | 0 | | 1,5 | |
| −2 | | 0,2 | | 2,0 | |
| −1,5 | | 0,5 | | 2,2 | |
| −1,0 | | 1,0 | | 2,4 | |
| −0,5 | | 1,1 | | 2,6 | |
| −0,1 | | 1,3 | | 3,0 | |

b) **Traza** la gráfica de $f$.

c) **Describe** las propiedades de $f$.

______

______

______

______

______

______

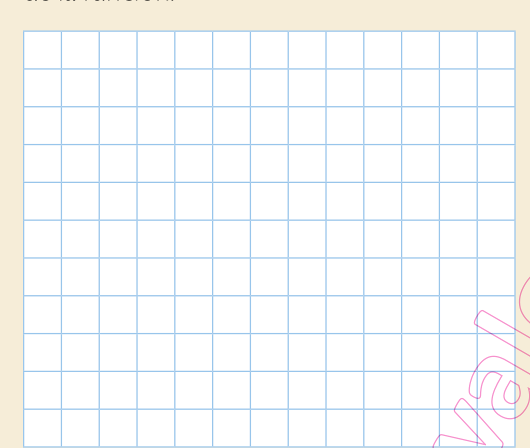
**6** **Considera** la función real $f$ definida como

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to f(x) = \dfrac{1}{3^x}. \end{cases}$$

a) **Completa** la tabla de valores:

| $x$ | $f(x) = 3^{-x}$ | $x$ | $f(x) = 3^{-x}$ | $x$ | $f(x) = 3^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| –2,0 | | 0 | | 1,2 | |
| –1,5 | | 0,2 | | 1,5 | |
| –1,0 | | 0,4 | | 2,0 | |
| –0,6 | | 0,8 | | 2,5 | |
| –0,2 | | 1,0 | | 3,0 | |

b) **Traza** la gráfica de $f$. Luego, **haz** un análisis de la función.

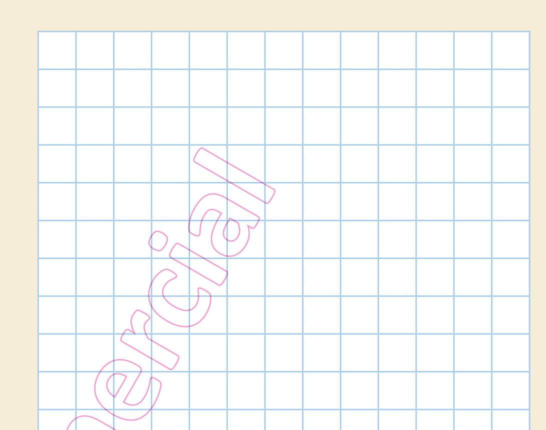


**7** **Resuelve.**

Un criadero de palomas tiene una población inicial de 20 palomas, 10 parejas con algunas de ellas que tienen nidos. En la tabla inferior se muestra el crecimiento de las palomas. Nota que no se tiene información ni del nacimiento ni de la muerte de las palomas. Los tiempos están dados en meses.

| *t (meses)* | *P (población)* |
|---|---|
| 1 | 22 |
| 3 | 27 |
| 4 | 30 |
| 6 | 36 |
| 8 | 44 |
| 10 | 54 |
| 11 | 60 |
| 12 | 66 |
| 15 | 90 |
| 18 | 121 |
| 24 | 220 |
| 30 | 402 |

**Construye** la gráfica que representa el crecimiento de las palomas en los 30 primeros meses.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

En ocasiones existen peleas dentro del aula, en esta situación de conflicto debemos profesores y estudiante ayudar a clamarlos en lugar de animarlos.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**8** Sean $f$, $g$, $h$ las funciones exponenciales que se definen a continuación: $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = 5^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

En el mismo sistema de coordenadas, **tracen** las gráficas de estas funciones y **analícenlas**.

**9** En cada ítem se define una función $u$. **Determinen** las asíntotas; **elaboren** una tabla de valores; **tracen** y **describan** su gráfica.

a) $u(x) = 2^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $u(x) = 2^{\left(-\frac{x}{3}\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $u(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$, $x \neq 0$.

d) $u(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

e) $u(x) = 3 + \dfrac{1}{2 + e^x}$, $x \geq 0$.

DCCD: M.5.1.75. Reconocer la función logarítmica como la función inversa de la función exponencial para calcular el logaritmo de un número, y graficarla analizando esta relación para determinar sus características.



**Saberes previos**

¿Cómo determinas si una función tiene inversa?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Cómo demuestras que una función es biyectiva?

# Función logarítmica

Sean $a > 0$ con $a \neq 1$ y $f$ la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, definida como $f(x) = a^x$ $x \in \mathbb{R}$. Tenemos $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = \mathbb{R}^+$. La función es biyectiva.

a) Inyectiva: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} = f(x_1) \neq f(x_2) = a^{x_2}$.
b) Sobreyectiva: $Rec(f) = \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x) = a^x$.

La función inversa de la función $f$ se define a continuación:

$$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ y \to f^{-1}(y) = x. \end{cases}$$

Esta función está relacionada con la función directa $f$ mediante la siguiente equivalencia:

$$y = f(x) = a^x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+.$$

Al número real $f^{-1}(y)$ se lo denomina logaritmo de base $a$ de $x$ y se lo nota $log_a(y)$. Así,

$$y = a^x \Leftrightarrow x = log_a(y).$$

Como se ha dicho, la función exponencial dada como $Exp_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ es biyectiva, por lo tanto, existe la función inversa notada como $Log_a$, esto es,

$$Log_a: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ y \to log_a(y), \end{cases}$$

donde $log_a(y)$ es la imagen de la función $Log_a$ en $y$.

La función $Log_a$ se llama función logaritmo de base $a$ y el número real $log_a(x)$ con $x > 0$ se llama logaritmo de base $a$ de $x$.

El $Dom(Log_a) = \mathbb{R}^+$, $Rec(Log_a) = \mathbb{R}$, la función exponencial y la logarítmica están relacionadas mediante la siguiente equivalencia:

$$y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = log_a(y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+.$$

Nota que cuando la base $a = e$, $y > 0$ se escribe $ln(y)$, lo que se denomina logaritmo natural de $y$, o también logaritmo neperiano. Tenemos

$$y = exp(x) \Leftrightarrow x = ln(y).$$

Cuando $a = 10$, $y > 0$, se escribe $log(y)$ al logaritmo de base 10 de $y$.

*Ejercicios resueltos*

1. La función $Exp_2: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to exp_2(x) = 2^x \end{cases}$ es biyectiva. Su función inversa está definida como $Log_2: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \to log_2(x) \end{cases}$.

   El número real $log_2(y)$ se llama logaritmo de base 2 de $x$ con $x > 0$.

**Recuerda que...**

$A$, $B$ son dos conjuntos (no vacíos) cualesquiera y $f$ es una función de $A$ en $B$ que suponemos biyectiva, esto es,

$$f: \begin{cases} A \to B \\ x \to f(x), \end{cases}$$

de modo que se verifican las dos condiciones.

**Inyectividad:**
$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

**Sobreyectividad:**
$Rec(f) = B$.

**Glosario**

biyección. Aplicación biyectiva.

biyectiva. Dicho de una aplicación de un conjunto en otro: que cumple que su correspondencia inversa es también una aplicación.

Tenemos la equivalencia $y = exp_2(x) \Leftrightarrow x = log_a(y)$. Una tabla de valores de la función $Log_2$ se obtiene con ayuda de la función exponencial $Exp_2$; su gráfica se muestra en la Figura 4.7.

$$exp_2(0) = 1, \qquad log_2(1) = 0,$$

$$exp_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \qquad log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2},$$

$$exp_2(1) = 2^1 = 2, \qquad log_2(2) = 1,$$

$$exp_2(2) = 2^2 = 4, \qquad log_2(4) = 2,$$

$$exp_2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$exp_2(-1) = \frac{1}{2}. \qquad log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1.$$

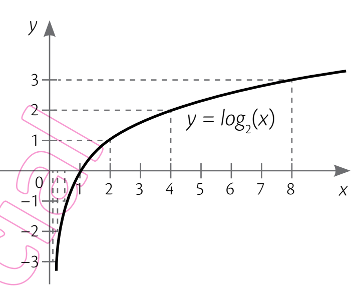
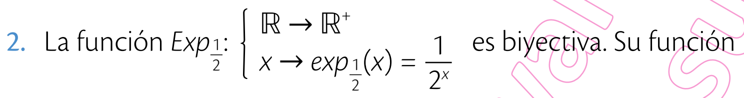



Figura 4.7. Gráfica de la función $y = log_2(x)$.

Observa que para $0 < x < 1$, se tiene $log_2(x) < 0$, y para $x > 1$ es $log_2(x) > 0$. La función logarítmica de base 2 es estrictamente creciente:

$$\forall x_1, x_2 \in ]0, \infty[, x_1 < x_2 \Rightarrow log_2(x_1) < log_2(x_2).$$



2. La función $Exp_{\frac{1}{2}}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to exp_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2^x} \end{cases}$ es biyectiva. Su función inversa está definida como $Log_{\frac{1}{2}}: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ y \to log_{\frac{1}{2}}(y) \end{cases}$,

de modo que se tiene la siguiente equivalencia:

$$y = exp_{\frac{1}{2}}(x) \Leftrightarrow x = log_{\frac{1}{2}}(y).$$

La tabla de valores de la función $Log_{\frac{1}{2}}$ es la que se detalla a continuación. Su gráfica se representa en la Figura 4.8.

$$exp_{\frac{1}{2}}(-3) = 2^3 = 8, \qquad log_{\frac{1}{2}}(8) = -3,$$

$$exp_{\frac{1}{2}}(-2) = 2^2 = 4, \qquad log_{\frac{1}{2}}(4) = -2,$$

$$exp_{\frac{1}{2}}(-1) = 2, \qquad log_{\frac{1}{2}}(2) = -1,$$

$$exp_{\frac{1}{2}}(0) = 1, \qquad log_{\frac{1}{2}}(1) = 0,$$

$$exp_{\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{2}, \qquad log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$exp_{\frac{1}{2}}(2) = \frac{1}{4}. \qquad log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2.$$

Con esta función, para $0 < x < 1$, se tiene $log_{\frac{1}{2}}(x) > 0$ y para $x > 1$ se tiene $log_{\frac{1}{2}}(x) < 0$. Además, la función es estrictamente decreciente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, x_1 < x_2 \Rightarrow log_{\frac{1}{2}}(x_1) > log_{\frac{1}{2}}(x_2).$$

**Interdisciplinariedad**

**Matemática e historia**

Los logaritmos neperianos se denominan de esta forma por el nombre de su inventor John Napier, quien intentó formar un procedimiento para agilitar los complicados cálculos que debían realizarse en astronomía y trigonometría.

**Glosario**

**astronomía.** Ciencia que trata de los astros, de su movimiento y de las leyes que lo rigen.

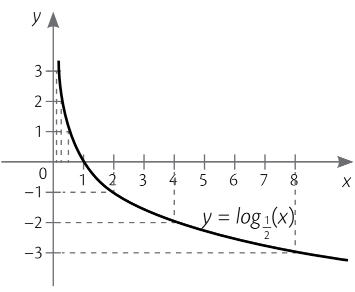



Figura 4.8. Gráfica de la función $Log_{\frac{1}{2}}x$.

## Propiedades de los logaritmos

***Teorema.*** Sea $a > 0$, $a \neq 1$ base de la función logarítmica $Log_a$. Se verifican las siguientes propiedades.

i) $log_a(\alpha\beta) = log_a(\alpha) + log_a(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$

ii) $log_a\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = log_a(\alpha) - log_a(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$

iii) $log_a(\alpha^{\frac{m}{n}}) = \dfrac{m}{n} log_a(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$.

**Demostración.** Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

i) De la definición de las funciones $Exp_a$ y $Log_a$ se tienen las siguientes equivalencias:

$u = log_a(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = exp_a(u),$
$v = log_a(\beta) \Leftrightarrow \beta = exp_a(v).$

Luego, $\alpha\beta = exp_a(u)exp_a(v) = exp_a(u + v),$

de donde $u + v = log_a(\alpha\beta)$ y consecuentemente,

$$log_a(\alpha\beta) = u + v = log_a(\alpha) + log_a(\beta).$$

**Observaciones:**

i) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Aplicando la propiedad asociativa del producto de números reales y la propiedad i) del teorema precedente, obtenemos

$log(\alpha\beta\gamma) = log_a(\alpha(\beta\gamma)) = log_a(\alpha) + log_a(\beta\gamma) = log_a(\alpha) + log_a(\beta) + log_a(\gamma).$

De manera general, sean $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}^+$. Entonces,

$$log(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n) = log_a(\alpha_1) + \ldots + log_a(\alpha_n).$$

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Puesto que $log_a(1) = 0$, se sigue que

$$log_a\left(\frac{1}{\alpha}\right) = log_a(1) - log_a(\alpha) = -\,log_a(\alpha).$$

iii) Para $m = 1$ y $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$log_a(\alpha^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} log_a(\alpha).$$

Para $n = 1$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se tiene $log_a(\alpha^m) = m\,log_a(\alpha)$.

*Ejemplos resueltos*

1. Se conoce que $log(2) \simeq 0{,}301\,0$, $log(3) \simeq 0{,}477\,1$. Calcular el valor aproximado de $log(\sqrt[5]{144})$ con cuatro cifras luego de la coma decimal.

   Puesto que $144 = 2^4 \times 3^2$, entonces,

   $log(\sqrt[5]{144}) = log\sqrt[5]{2^4 \times 3^2} = log(2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{2}{5}})$

   $= \dfrac{4}{5}log(2) + \dfrac{2}{5}log(3) = \dfrac{4}{5} \times 0{,}301\,0 + \dfrac{2}{5} \times 0{,}477\,1 = 0{,}431\,64.$



**Interdisciplinariedad**

**Matemática y curiosidades**

Una curiosidad sobre las aplicaciones de logaritmos en la vida real es la de Benjamin Franklin, el famoso científico. En su testamento, Franklin donaba 1 000 libras a los habitantes de Boston, a condición de que se prestasen al 5 % a artesanos jóvenes. Según Franklin, al cabo de 100 años, la suma se habría convertido en 131 000 libras. Comprobemos si esto es cierto.

El capital final al cabo de esos 100 años será

$x = 1\,000 \cdot 1{,}05^{100}$. Para calcular esa enorme potencia, usaremos los logaritmos:

$x = 1\,000 \cdot 1{,}05^{100};$
$log\,x = log\,1\,000 + 100 \cdot log\,1{,}05;$
$log\,x = 3 + 100 \cdot 0{,}021\,2 = 5{,}12;$
$x = 10^{5{,}12} = 131\,825{,}67$ libras

Adaptado de: https://www201501.wordpress.com/funcion-logaritmica-y-aplicaciones/



Shutterstock, (2020). 423235870

▲ Benjamin Franklin (1706 - 1790).

2. Se conocen valores aproximados con siete cifras luego de la coma decimal de los siguientes logaritmos:

$ln(2) \simeq 0{,}693\,147\,2$, $ln(3) \simeq 1{,}098\,612\,3$, $ln(5) \simeq 1{,}609\,437\,9$.

i) Obtén el valor aproximado de $ln\left(\frac{8}{5}\right)$ con siete cifras de precisión.

$$ln\left(\frac{8}{5}\right) = ln\left(\frac{2^3}{5}\right) = 3ln(2) - ln(5) \simeq$$

$$3 \times 0{,}693\,147\,2 - 1{,}609\,437\,9 \simeq = 0{,}470\,003\,7.$$

ii) Obtén el valor aproximado de $y = ln\left(\frac{200}{9}\right)$.

Primeramente, $200 = 5^2 \times 2^3$ y $9 = 3^2$. Entonces,

$$y = ln\left(\frac{200}{9}\right) = ln\left(\frac{5^2 \times 2^3}{3^2}\right) = 2ln(5) + 3ln(2) - 2ln(3)$$

$$\simeq 2 \times 1{,}609\,437\,9 + 3 \times 0{,}693\,147\,2 - 2 \times 1{,}098\,612\,3 = 3{,}101\,092\,8.$$

3. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $z = \frac{5^a \times 2^a}{3^a}$. Demuestra que $z = 10^{a(1-log(3))}$, y calcula $a$ si $z = 100$.

Sea $a \in \mathbb{R}$. De las propiedades de los logaritmos, tenemos

$$log(z) = log\left(\frac{5^a \times 2^a}{3^a}\right) = log(5^a) + log(2^a) - log(3^a)$$

$$= a\,log(5) + a\,log(2) - a\,log(3)$$

$$= a(log(5) + log(2) - log(3)) = a(1 - log(3)),$$

de donde $z = 10^{a(1-log(3))}$.

De la igualdad obtenida $log(z) = a(1 - log(3))$ y tomando en cuenta que para $z = 100 = 10^2$, obtenemos $log(z) = log(10^2) = 2$, con lo que

$$2 = a(1 - log(3)) \Leftrightarrow a = \frac{2}{1 - log(3)} \simeq 3{,}824\,978\,578.$$

4. Sean $a > 0$ y $a \neq 1$. Para $x > 0$ se tiene $z = \frac{2}{3}log_a(8) - 4log_a(2) + 3log_a(1 + x)$. Simplifiquemos la escritura de $z$. Apliquemos las propiedades de los logaritmos y escribamos $z$ con un solo logaritmo. Tenemos:

$$z = \frac{2}{3}log_a(8) - 4log_a(2) + 3log_a(1 + x)$$

$$= log_a(8^{\frac{2}{3}}) + log_a(2^{-4}) + log_a(1 + x)^3$$

$$= log_a\left(8^{\frac{2}{3}} \times 2^{-4} \times (1 + x)^3\right) = log_a((2^2 \times 2^{-4} \times (1 + x)^3)$$

$$= log_a\left(\frac{1}{4}(1 + x)^3\right).$$



**Recuerda que...**

Dado $N \in \mathbb{R}^+$, ¿cómo están relacionados $log_a(N)$ y $log_b(N)$? Tenemos la respuesta en el siguiente teorema.

**Teorema.** Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a \neq 1$, $b \neq 1$ bases de dos funciones logarítmicas, $N \in \mathbb{R}^+$. Entonces,

$$log_a(N) = log_a(b)\,log_b(N).$$



**Conexiones con las TIC**

Si no dispones de una calculadora científica, puedes **ingresar** al siguiente enlace y calcular el logaritmo de cualquier base:

*bit.ly/2Ldz6Wa*



# Taller práctico

DCCD: M.5.1.75. Reconocer la función logarítmica como la función inversa de la función exponencial para calcular el logaritmo de un número, y graficarla analizando esta relación para determinar sus características.

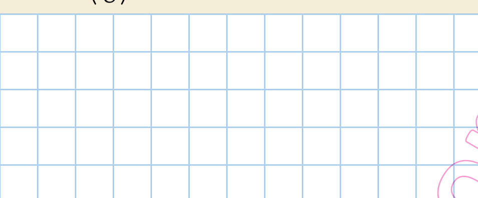


**1** Se conocen valores aproximados con siete cifras de precisión:

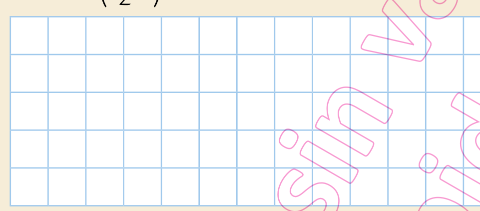
$ln(2) \simeq 0{,}693\,147\,2$, $ln(3) \simeq 1{,}098\,612\,3$, $ln(11) \simeq 2{,}397\,879\,5$.

**Calcula** el valor aproximado de $x$ que se define en cada caso, y **verifica** su resultado.

a) $x = log_7\left(\frac{3}{8}\right) \simeq$

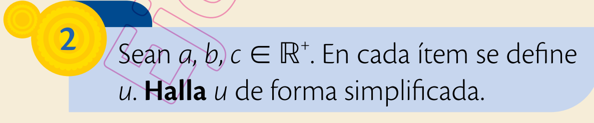


b) $x = log_3\left(\frac{11^3}{2^5}\right) \simeq$



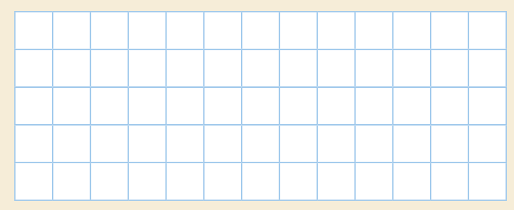
c) $x = log_{10}\left(\frac{2^7 \times 7^5 \times 11^2}{3^6}\right) \simeq$



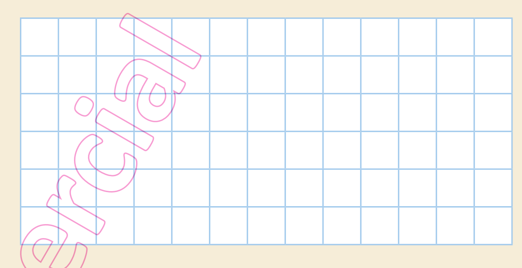


**2** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. En cada ítem se define $u$. **Halla** $u$ de forma simplificada.

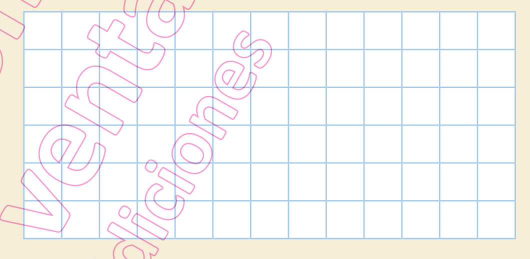
a) $log(u) = \frac{1}{2}log(a + b) - 3log(a) + 2log(b + c)$.



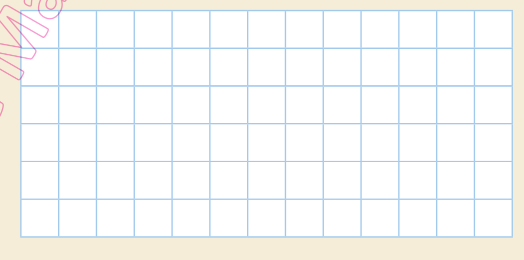
b) $ln(u) = \frac{1}{2}ln(a^2 + b^2) - \frac{1}{3}(ln(a + b) - ln(b - a))$, $b > a$.



c) $log_2(u) = \frac{1}{4}(3log_2(a) - (5log_2(b) + 2log_2(c)))$.



d) $log_5(u) = \frac{1}{3}\,log_5(a) + \frac{1}{4}\left(log_5(a) + \frac{3}{2}\,log_5(c)\right) - log_5(b) + 3log_5(a + c) - log_5\left(\frac{b}{a}\right)$.



**3** La función $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to exp(x) = e^x \end{cases}$ es biyectiva.

A su función inversa se la nota $Ln$ y se la define como:

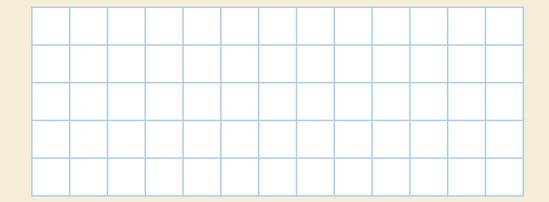
$$Ln: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \to ln(x). \end{cases}$$

El número real $ln(x)$ con $x > 0$ se llama logaritmo natural de $x$. Se tiene

$$y = exp(x) = e^x \Leftrightarrow x = ln(y).$$

a) **Utiliza** una calculadora y **genera** una tabla de valores que te permitan construir su gráfica.

b) **Grafica** la función $y = ln(x)$.



c) **Responde** las preguntas:

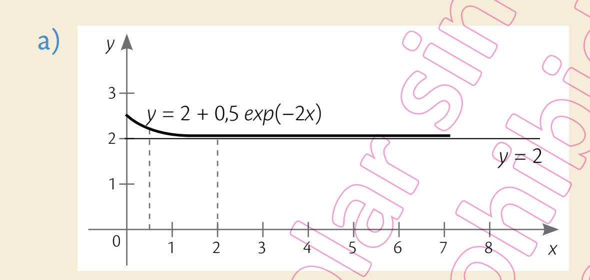
- ¿En qué intervalo la función es negativa, positiva?

- ¿Cuál es la ecuación de la asíntota de la función?

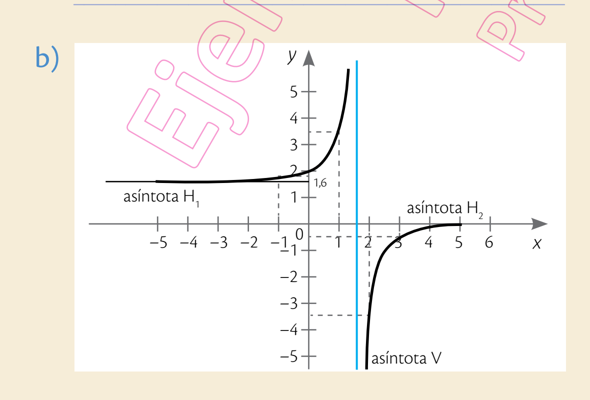
- ¿En qué punto corta al eje de las $x$?

**4** **Analiza** el comportamiento de las siguientes gráficas. **Determina** las asíntotas de cada una y los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a)




b)




## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando trabajamos con estudiantes con necesidades auditivas, el uso de la computadora y de las nuevas tecnologías son recursos que ayudan a canalizar el aprendizaje.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**5** Se conocen valores aproximados con seis cifras de precisión:

$ln(2) \simeq 0{,}693\,147\,2$; $ln(3) \simeq 1{,}098\,612\,3$.

**Calculen** el valor aproximado de $x$ que se define en cada caso y **verifiquen** su resultado.

a) $x = ln\left(\frac{3}{2}\right) \simeq$

b) $x = ln_3\left(\frac{27}{2^5}\right) \simeq$

**6** En cada ítem se define una función. **Determinen** su dominio. **Estudien** la existencia de asíntotas. **Tracen** la gráfica de la función y de la asíntota o de las asíntotas.

a) $v(x) = \dfrac{1}{ln(x)}, \quad ln(x) \neq 0.$

b) $p(x) = \dfrac{10}{(2 + ln(x))^2}, \quad ln(x) \neq -2.$

c) $t(x) = \dfrac{1}{log_{10}(x)}, \quad x > 10.$

**7** **Determinen** el dominio de cada función $\varphi$. **Estudien** la existencia de asíntotas. A continuación, **calculen** algunos valores de la función $\varphi$ y **tracen** la gráfica de esta función y de su o sus asíntotas.

a) $\varphi(x) = \dfrac{1}{8 - 2^x}, \quad x \in Dom(\varphi).$

b) $\varphi(x) = \dfrac{5}{(4 - 10^{-x})^2}, \quad x \in Dom(\varphi).$

c) $\varphi(x) = \dfrac{5}{2 - log_2(x)}, \quad x > 0, x \neq 4.$

DCCD: M.5.1.77. Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas, con ayuda de las TIC.



**Saberes previos**

¿Qué es una ecuación exponencial?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Puedes utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales?



**Recuerda que...**

Una ecuación es exponencial cuando las incógnitas forman parte de los exponentes de ciertas bases constantes.

Para resolver una ecuación exponencial, debes tener en cuenta lo siguiente:

- La base es positiva: $a > 0$.
- La solución de la ecuación exponencial con la forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ es la solución (o soluciones) de la ecuación $f(x) = g(x)$. Esto se debe a que dos potencias con la misma base son iguales si y solo si sus exponentes son iguales (inyectividad de la función dada como $a^u \in \mathbb{R}$).

# Ecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas

1. Si existe $x \in \mathbb{R}$, determina la solución de la ecuación:

$$5^{x+1} + 5^x = 750.$$

Primeramente, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $5^{x+1} = 5 \times 5^x$, y $750 = 6 \times 125$, de modo que la ecuación propuesta se escribe en forma equivalente como

$$5^{x+1} + 5^x = 750 \Leftrightarrow 5 \times 5^x + 5^x = 6 \times 125 \Leftrightarrow$$
$$5^x(5 + 1) = 6 \times 125 \Leftrightarrow 5^x = 125 = 5^3.$$

Puesto que la función exponencial, definida como $f(x) = 5^x$, $x \in \mathbb{R}$, es inyectiva, se sigue que $5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$. Luego, la solución de la ecuación propuesta es $x = 3$.

2. Considera la ecuación: $x \in ]0, \infty[$, tal que

$$log_2(x) + log_{\frac{1}{2}}(x) + log_8(x) + log_{\sqrt{2}}(x) = \frac{35}{3}.$$

Para resolver esta ecuación, transformamos todos los logaritmos a la misma base 2. Tenemos:

$$y = log_{\frac{1}{2}}(x) \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{(2)^y} = 2^{-y},$$

de donde $log_2(x) = -y$, o bien $y = -log_2(x)$. Así, $log_{\frac{1}{2}}(x) = -log_2(x)$.

A continuación tenemos:

$$z = log_8(x) \Leftrightarrow x = 8^z = (2^3)^z = 2^{3z}.$$
$$log_2(x) = 3z \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}\,log_2(x).$$

Consecuentemente, $log_8(x) = \frac{1}{3}log_2(x)$. De forma similar, se obtiene $log_{\sqrt{2}}(x) = 2log_2(x)$.

Reemplazando estos resultados en la ecuación propuesta, se obtiene

$$log_2(x) - log_2(x) + \frac{1}{3}log_2(x) + 2log_2(x) = \frac{35}{3},$$

y luego de simplificar, resulta

$$\frac{7}{3}log_2(x) = \frac{35}{3} \Leftrightarrow log_2(x) = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 = 32.$$

La solución de la ecuación propuesta es $x = 32 \in ]0, \infty[$. Verifica.

3. Halla, si existe $x \in \mathbb{R}$, la solución de la ecuación:

$$log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + log_2(3^{x-1} + 1).$$

Tenemos $9^{x-1} = (3^2)^{x-1} = 3^{2(x-1)}$, $log_2(4) = 2$. Luego,

$$log_2(9^{x-1} + 7) \;\; = log_2(4) + log_2(3^{x-1} + 1)$$
$$log_2(9^{x-1} + 7) \;\; = log_2(4(3^{x-1} + 1)),$$
$$log_2(3^{2(x-1)} + 7) = log_2(4(3^{x-1} + 1)).$$

La función $Log_2$ es inyectiva. Aplicando esta propiedad a la ecuación precedente, se tiene la siguiente ecuación:

$$3^{2(x-1)} + 7 = 4(3^{x-1} + 1) \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} + 3 = 4 \times 3^{x-1}.$$

No es inmediato obtener la solución de esta última ecuación. La transformamos en una ecuación de segundo grado. Para el efecto, ponemos $v = 3^{x-1}$. Entonces, $v^2 = (3^{x-1})^2 = 3^{2(x-1)}$. Obtenemos la ecuación $v^2 + 3 = 4v$. Así,

$$v^2 + 3 = 4v \Leftrightarrow v^2 - 4v + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(v-3)(v-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v - 3 = 0, \text{ o} \\ v - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, \text{ o} \\ v = 1. \end{cases}$$

Para $v - 3$, resulta $3 = 3^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
Para $v - 1$, se obtiene $1 = 3^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Las soluciones son $x = 1$ y $x = 2$. Verifiquemos que $x = 2$ es solución. Calculemos el primer miembro de la ecuación:

$$y = log_2(9^{x-1} + 7) = log_2(9^{2-1} + 7) = log_2(16) = 4.$$

Calculemos el segundo miembro:

$$y = 2 + log_2(3^{x-1} + 1) = 2 + log_2(3^{2-1} + 1) = 2 + log_2(4) = 4.$$



**Recuerda que...**

Para resolver ecuaciones exponenciales, puedes proceder así:

- Descomponer la parte numérica en sus factores primos e igualar bases solo si es factible.
- Aplicar logaritmos a los dos lados de la igualdad, (porque la función logarítmica es inyectiva).
- Efectuar correctamente operaciones indicadas.

4. Estudia la existencia de soluciones en ℝ y resuelve la ecuación

$$log_2(x + 2) - log_2(2x - 3) = 2.$$

Primeramente, la función $Log_2$ tiene como dominio el conjunto $]0, \infty[$. Luego, $log_2(x + 2)$ está bien definido si y solo si

$$x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

De manera similar, $log_2(2x - 3)$ está bien definido si y solo si $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. De estos dos resultados, $log_2(x + 2) - log_2(2x - 3)$ está bien definido si y solo si $x > -2$ y $x > \frac{3}{2}$, de donde $x > \frac{3}{2}$. Observa la Figura 4.9.

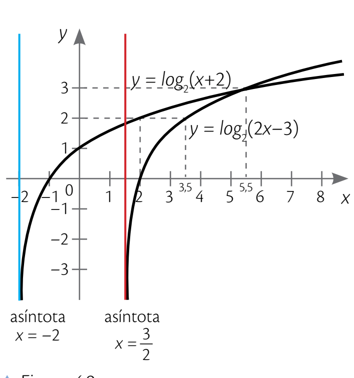


Figura 4.9.

Si la ecuación tiene solución $x$, esta debe satisfacer la condición $x > \frac{3}{2}$. Resolvamos la ecuación. Tenemos

$$log_2(x + 2) - log_2(2x - 3) = 2 \Leftrightarrow log_2\left(\frac{x + 2}{2x - 3}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x + 2}{2x - 3} = 2^2$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = 8x - 12 \Leftrightarrow 7x = 14 \Leftrightarrow x = 2.$$

Así, la solución es $x = 2$. Nota que esta satisface la condición $x > \frac{3}{2}$.

5. Considera la ecuación: $x \in \mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ solución de

$$ln(x + 10) - \frac{1}{2}\, ln(2x - 5) = -ln(\alpha),$$

con $\alpha \geq \frac{2}{10}$. Estudia la existencia de soluciones de esta ecuación.

Primeramente, determinamos el conjunto $I$ en el que esta ecuación tiene sentido. Como el dominio de la función logaritmo natural $Ln$ es $]0, \infty[$, se sigue que $ln(x + 10)$ y $ln(2x - 5)$ están bien definidos si y solo si se verifica que sus argumentos son positivos, esto es,

$$\begin{cases} x + 10 > 0, \text{ y} \\ 2x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -10, \text{ y} \\ x > \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, $ln(x + 10) - \frac{1}{2}\, ln(2x - 5)$ está bien definido si y solo si $x > \frac{5}{2}$. Así, $\mathrm{I} = \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$. Para $x \in \left]\frac{5}{2}, \infty\right[$, tenemos:

$$ln(x + 10) - \frac{1}{2}\, ln(2x - 5) = ln\left(\frac{x + 10}{\sqrt{2x - 5}}\right).$$

La ecuación propuesta se escribe en forma equivalente, como

$$ln\left(\frac{x + 10}{\sqrt{2x - 5}}\right) = -\, ln(\alpha) = ln\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

y por la inyectividad de la función $Ln$, se obtiene

$$\left(\frac{x + 10}{\sqrt{2x - 5}}\right) = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha(x + 10) = \sqrt{2x - 5}\,.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros en la última igualdad, tenemos

$$\alpha^2(x + 10)^2 = 2x - 5, \quad x^2 + 20x + 100 = \frac{1}{\alpha^2}(2x - 5),$$

$$x^2 + 20x - \frac{2}{\alpha^2}x + 100 + \frac{5}{\alpha^2} = 0.$$

Determinemos las raíces de esta ecuación en términos de $\alpha$. Para el efecto, aplicamos la conocida fórmula de obtención de las raíces de una ecuación de segundo grado. Tenemos

$$x = \frac{-\left(20 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \pm \sqrt{\left(20 - \frac{2}{\alpha^2}\right)^2 - 4\left(100 + \frac{5}{\alpha^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-20 + \frac{2}{\alpha^2} \pm \sqrt{400 - \frac{80}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^4} - 400 - \frac{20}{\alpha^2}}}{2}$$

$$= \frac{-20 + \frac{2}{\alpha^2} \pm \sqrt{\frac{4}{\alpha^4} - \frac{100}{\alpha^2}}}{2} = \frac{-20 + \frac{2}{\alpha^2} \pm \sqrt{\frac{4 - 100\alpha^2}{\alpha^4}}}{2}.$$

### Recuerda que...

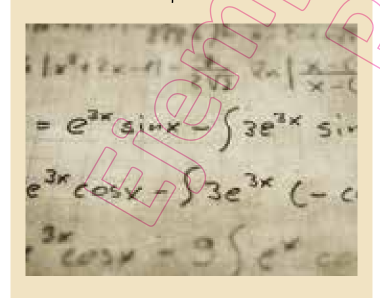
Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en las que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Para resolver ecuaciones logarítmicas, ten en cuenta lo siguiente:

- Aplica las propiedades de los logaritmos hasta obtener un solo logaritmo en ambos miembros de la ecuación.
- Resuelve la ecuación que queda y verifica la validez de las soluciones obtenidas.

### Interdisciplinariedad

Las ecuaciones logarítmicas son ampliamente utilizadas para resolver problemas de crecimiento poblacional, que son modelados mediante ecuaciones exponenciales.



Shutterstock, (2020). 598826399

▲ Fórmulas matemáticas.

La raíz cuadrada está bien definida si y solo si

$$4 - 100\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow 100\alpha^2 \leq 4 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{4}{100}.$$

Como $\alpha > \frac{1}{5}$, $\alpha^2 \leq \frac{4}{100} \Rightarrow \alpha \leq \frac{2}{10}$. Para $\alpha > \frac{2}{10}$ la ecuación no tiene solución. Consideramos el caso $\alpha = \frac{2}{10}$,

$$x = \frac{-200 + \dfrac{2}{\left(\dfrac{2}{10}\right)^2}}{2} = \frac{-20 + \dfrac{200}{4}}{2} = 15 \in \mathbb{I}.$$

Conclusión: la ecuación tiene solución si y solo si $\alpha = \frac{2}{10}$ y $x = 15$.

6. Consideremos la ecuación $\sqrt{log_2(x)} = log_2(\sqrt{x})$, $\quad x > 0$.

Para estudiar la existencia de soluciones, y, en caso de existir, para hallar la o las soluciones, definimos dos funciones asociadas a esta ecuación:

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{log_2(x)}\ , & x > 0, \\ v(x) = log_2(x)\ , & x > 0. \end{cases}$$

Primeramente, el dominio de la función $Log_2$ es el conjunto $]0, \infty[$, con lo que $log_2(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}log_2(x)$ está bien definido si $x > 0$.
Luego, $u(x)$ está bien definido si y solo si $log_2(x) \geq 0$.
Como $log_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, se sigue que $Dom(u) = [1, \infty[$, y siendo $Dom(v) = ]0, \infty[$, resulta que la ecuación está propuesta en el conjunto

$$Dom(u) \cap Dom(v) = ]0, \infty[ \cap ]1, \infty[ = ]1, \infty[.$$

Nota que $x = 1$ es una solución, pues

$$u(1) = \sqrt{log_2(1)} = 0 = log_2(\sqrt{1}) = v(1).$$

Pasemos a resolver esta ecuación. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos

$$log_2(x) = \frac{1}{4}log_2^2(x) \Leftrightarrow log_2(x) - \frac{1}{4}log_2^2(x) = 0, \quad x \geq 1.$$

Sea $y = log_2(x)$. La última ecuación se expresa como $y - \frac{1}{4}y^2 = 0$. Tenemos

$$y - \frac{1}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow y\left(1 - \frac{1}{4}y\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \text{ o} \\ 1 - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases}.$$

Como $y = log_2(x)$, $y = 0 = log_2(x) \Leftrightarrow x = 1$ que ya fue obtenida. A continuación, $y = 4 = log_2(x) \Leftrightarrow x = 2^4 = 16$. Se verifica inmediatamente $u(16) = v(16) = 2$. Se tienen dos soluciones $x = 1$ y $x = 16$.

**Interdisciplinariedad**

**Matemática y música**

¿Qué tiene que ver la matemática con la música?

Pues en realidad, mucho.
El uso de logaritmos en la música permite hallar las vibraciones de las tonalidades musicales, pero para hallar estas vibraciones, siempre tiene que estar el logaritmo en base dos.



Shutterstock, (2020). 80486173

▲ Altavoces y sonido.

**Conexiones con las TIC**

Para calcular cualquier logaritmo o resolver una ecuación logarítmica, puedes utilizar las calculadoras científicas o ciertos *softwares*. En el siguiente enlace puedes **acceder** a una calculadora para ecuaciones logarítmicas:

***bit.ly/2IRd4Xm***



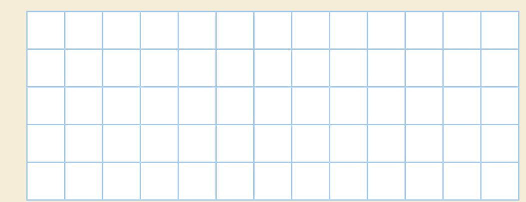
# Taller práctico

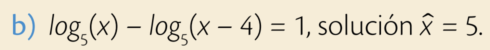
DCCD: M.5.1.77. Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas, con ayuda de las TIC.



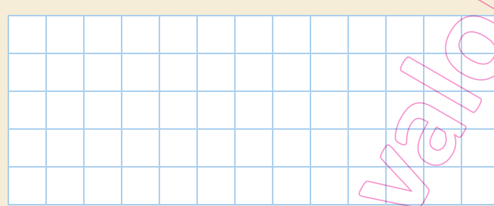
**1** En cada ítem, **considera** la ecuación. **Halla** la solución y **prueba** que $\hat{x} \in \mathbb{R}$ que se indica es la solución.

a) $log_2^2(x) - 4log_2(x) - 32 = 0$, solución $\hat{x} = 256$, $\hat{x} = \frac{1}{16}$.

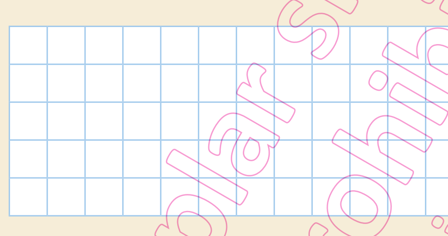




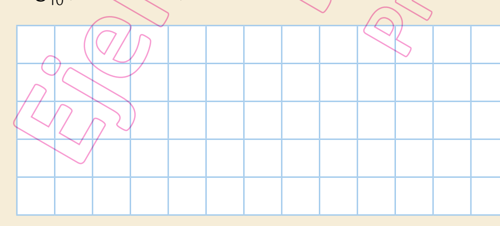
b) $log_5(x) - log_5(x - 4) = 1$, solución $\hat{x} = 5$.



c) $log_3(x^2 - 1) - log_3(x + 1) = 5$, solución $\hat{x} = 244$.



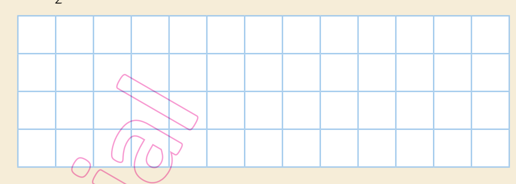
d) $log_{10}(x^2 + x + 1) + log_{10}(x - 1) = log_{10}(x^3 - x + 2)$, solución $\hat{x} = 3$.



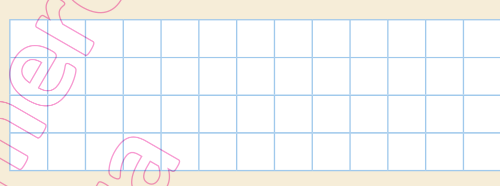


**2** La ecuación que se propone en cada ítem tiene una sola solución. **Determínala** y **prueba** que es realmente la solución.

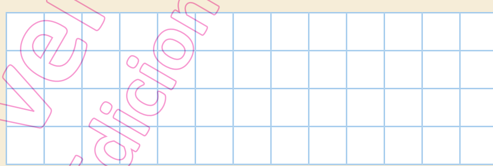
a) $log_{\frac{1}{2}}(2t - 4) = 4$.



b) $log_3(5x + 1) = 4$.



c) $log_{10}\left(5 - \frac{x}{20}\right) = -1$.

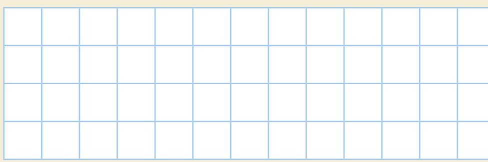


d) $log_4\left(5 - \frac{x}{30}\right) = 3$.

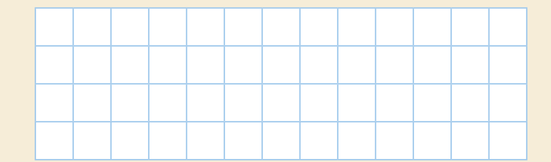


**3** **Halla** la solución de cada una de las ecuaciones que se indican.

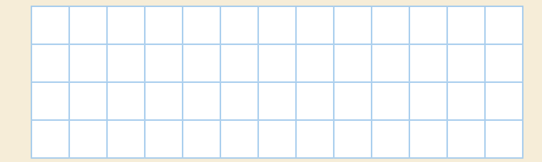
a) $3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$.



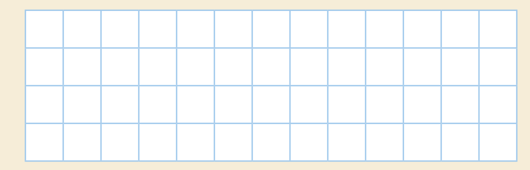
b) $9^{x+1} + 3^{x+3} = 486$.



c) $2 \times 3^x = 1{,}5^{x+1}$.

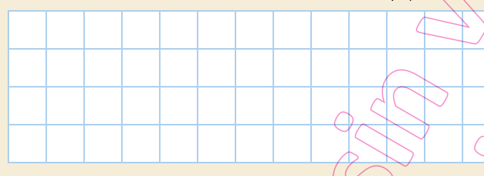


d) $3^{x(x+1)\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}$.

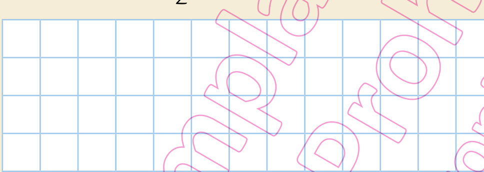


**4** **Estudia** la existencia de soluciones, **resuelve** en $\mathbb{R}$ las ecuaciones siguientes y **muestra** que una solución es $\hat{x}$ que se indica.

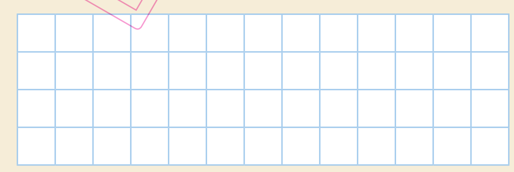
a) $e^{\frac{x}{2}} - 7e^{\frac{1}{x}} + 10 = 0$, solución $\hat{x} = \dfrac{1}{ln(2)}$.



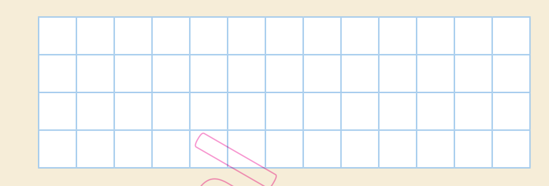
b) $\exp(4x + 2) - 3\exp(2x + 1) + 2 = 0$,
solución $\hat{x} = -\dfrac{1}{2}$.



c) $ln^2(2x - 1) + ln\left(\dfrac{1}{(2x-1)^3}\right) - 10 = 0$,
solución $\hat{x} = -\dfrac{1}{2}(1 + e^2)$.



d) $ln^2\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - 2 = 0$,
solución $\hat{x} = -\dfrac{e^2}{e^2 - 1}$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando en el grupo de trabajo existe un compañero con sordera es necesario aprender lenguajes de comunicación visuales para comunicarnos con él.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**5** Sean $a > 0$ y $a \neq 1$, $x > 0$. Se define $z = log_a(x)$, y, $y = log_{\frac{1}{a}}(x)$. **Prueben** que $z = -y$.

**6** Sea $a > 0$ con $a \neq 1$. **Resuelvan** la ecuación

$$10^{log_a(x^2 - 3x + 5)} = 3^{log_a(10)}.$$

**7** **Indaguen** y **respondan**.
¿Existen otras propiedades para las funciones exponencial y logarítmica? **Citen** un ejemplo de cada propiedad.

**8** **Resuelvan** la ecuación planteada; **verifiquen** el resultado obtenido.

a) $4^{\frac{2x-1}{x-5}} = \dfrac{1}{64}$.

b) $2^{8-3x} - 2^{7x-2} = 0$.

c) $\dfrac{e^{3x-2} - e^{1-2x}}{e^{2x-1}} = 1$.

d) $log_3(x - 2) - log_3(x^2) = -log_3(3x)$.

e) $ln(x^2 + 2) - ln(x + 1) = ln(2 - x)$.

DCCD: M.5.1.77. Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas, con ayuda de las TIC.



**Saberes previos**

¿Qué es una inecuación?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Cuáles son las propiedades de las inecuaciones?



**Recuerda que...**

Sea $a > 0$ con $a \neq 1$. Se ha visto que la función exponencial $Exp_a$ para $0 < a < 1$ es estrictamente decreciente, esto es,

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow exp_a(x_1) > exp_a(x_2)$,

mientras que para $a > 1$, esta función es estrictamente creciente:

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow exp_a(x_1) < exp_a(x_2)$.

Estos dos resultados nos permiten resolver inecuaciones en las que intervienen funciones exponenciales de la misma base $a$.

De manera general, si $c \leq 0$, el conjunto solución de la inecuación es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x \leq c\} = \varnothing.$$

Si $c > 0$,
$S' = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x \leq c\} = ]-\infty, log_a(c)[$.

Si $c \leq 0$,
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x \leq c\} = \varnothing$,
$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x > c\} = \mathbb{R}$.

# Inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas

Sea $a > 1$, la desigualdad $a^x \geq 1$ se verifica para todo $x \in [0, \infty[$ y la desigualdad $a^x < 1$ se verifica para todo $x \in ]-\infty, 0[$. Escribimos

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x \geq 1\} = [0, \infty[,$$

y lo denominamos conjunto solución de la inecuación $a^x \geq 1$. Ponemos

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x < 1\} = ]-\infty, 0[,$$

y se llama conjunto solución de la inecuación $a^x < 1$.

Para $0 < a < 1$, la desigualdad $a^x \geq 1$ se verifica para todo $x \in ]-\infty, 0[$. Ponemos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x \geq 1\} = ]-\infty, 0]$ y es el conjunto solución de la inecuación $a^x \geq 1$.

*Ejemplos resueltos*

1. Resuelve la inecuación $2^{5x-1} > 2^{-3x+15}$.

   Tomando en consideración que la función $Exp_a$ es estrictamente creciente,

   $$2^{x_1} > 2^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

   Como las bases son iguales, entonces: $5x - 1 > -3x + 15$. Resolvemos la inecuación

   $$5x - 1 > -3x + 15 \Leftrightarrow 8x > 16 \Leftrightarrow x > 2.$$

   Luego, el conjunto solución se expresa como

   $$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{5x-1} > 2^{-3x+15}\} = ]2, \infty[.$$

2. Sea la inecuación $3^{2x} - \frac{5}{2} \times 3^x + 1 > 0$. ¿Cuál es el conjunto solución?

   Tenemos $3^{2x} = (3^x)^2$. Luego, $3^{2x} - \frac{5}{2} \times 3^x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2(3^x)^2 - 5 \times 3^x + 2 > 0$.

   Ponemos $v = 3^x$. La última desigualdad se transforma en la siguiente:

   $$2v^2 - 5v + 2 > 0.$$

   Sea $P$ la función polinomial definida como $P(v) = 2v^2 - 5v + 2$ $v \in \mathbb{R}$. Determinemos las raíces de la ecuación $P(v) = 0$. Tenemos

   $$2v^2 - 5v + 2 > 0 \Leftrightarrow v^2 - \frac{5}{2}v + 1 = 0$$

   $$v = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}.$$

   Las raíces de $P(v) = 0$ son $v_1 = \frac{1}{2}$ y $v_2 = 2$. El polinomio $P(v)$ se escribe como

   $$P(v) = 2v^2 - 5v + 2 = 2\left(v^2 - \frac{5}{2}v + 1\right) = 2\left(v - \frac{1}{2}\right)(v - 2), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Con este resultado estudiamos la inecuación $2v^2 - 5v + 2 > 0$.
Tenemos

$$2v^2 - 5v + 2 > 0 \Leftrightarrow 2\left(v - \frac{1}{2}\right)(v-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v - \frac{1}{2} > 0 \wedge v - 2 > 0, \text{ o} \\ v - \frac{1}{2} < 0 \wedge v - 2 < 0. \end{cases}$$

Construimos la tabla de signos de $v - \frac{1}{2}$, $v - 2$ y de $2\left(v - \frac{1}{2}\right)(v-2)$.

| | $-\infty$ a $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ a $2$ | $2$ a $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $v - \frac{1}{2}$ | − | + | + |
| $v - 2$ | − | − | + |
| $2\left(v - \frac{1}{2}\right)(v-2)$ | + | − | + |

De la tabla obtenemos: $2v^2 - 5v + 2 > 0 \Leftrightarrow v < \frac{1}{2} \vee v > 2$.

Como $v = 3^x$, resultan dos inecuaciones: $\begin{cases} 3^x < \frac{1}{2}, \text{ o} \\ 3^x > 2. \end{cases}$

$$3^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x ln(3) < ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln(2) \Leftrightarrow x < -\frac{ln(2)}{ln(3)} \Leftrightarrow$$

$$x \in \left]-\infty, -\frac{ln(2)}{ln(3)}\right[,$$

$$3^x > 2 \Leftrightarrow x ln(3) > ln(2) \Leftrightarrow x > \frac{ln(2)}{ln(3)} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{ln(2)}{ln(3)}, \infty\right[.$$

Así, el conjunto solución de la inecuación propuesta es

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x} - \frac{5}{2} \times 3^x + 1 > 0\right\} = \left]-\infty, -\frac{ln(2)}{ln(3)}\right[ \cup \left]\frac{ln(2)}{ln(3)}, \infty\right[.$$

3. Halla el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de la inecuación $2^{5x-1} > 3$.
La función logaritmo natural *Ln* es estrictamente creciente. Es decir que si $x_1, x_2 \in ]0, \infty[ = Dom(Ln), x_1 < x_2 \Rightarrow ln(x_1) < ln(x_2)$.

Para hallar el conjunto solución de la inecuación aplicamos la función *Ln*. Tenemos

$$ln(2^{5x-1}) > ln(3)$$
$$(5x-1)\, ln(2) > ln(3).$$

Como $ln(2) > 0$, entonces, $5x - 1 > \frac{ln(3)}{ln(2)}$,

de donde $$x > \frac{1}{5}\left(1 + \frac{ln(3)}{ln(2)}\right) = \frac{1}{5} + \frac{ln(3)}{ln(32)}.$$

El conjunto solución *S* está definido como

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{5x-1} > 3\} = \left]\frac{1}{5} + \frac{ln(3)}{ln(32)}, \infty\right[.$$



**Recuerda que...**

- Las inecuaciones exponenciales en una incógnita tienen la forma:

  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$,
  $a^{f(x)} < a^{g(x)}$,

  donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones en *x* e *y*, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.
- Una inecuación logarítmica es una desigualdad en la que la variable aparece en el argumento del logaritmo. Para su resolución es necesario considerar las características de la base, la definición y las propiedades de la monotonía del logaritmo.
- Propiedades de la **monotonía** del logaritmo:

a) si $a > 1, b > c$
$\Rightarrow log_a b > log_a c$.

b) si $0 < a > 1, b > c$
$\Rightarrow log_a b > log_a c$.

**Glosario**

**monotonía.** Falta de variedad en cualquier cosa.

# Taller práctico

DCCD: M.5.1.77. Aplicar las propiedades de los exponentes y los logaritmos para resolver ecuaciones e inecuaciones con funciones exponenciales y logarítmicas, con ayuda de las TIC.



**1** **Sigue** el proceso y **resuelve** la inecuación $\log_2 |3 - 4x| > 5$.

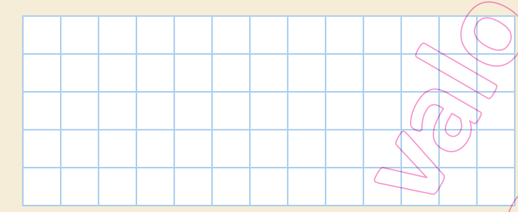
- **Determina**. El dominio de la función $\log_2$ es $]0, \infty[$. Consecuentemente, $|3 - 4x| > 0$. Por la definición del valor absoluto, se tiene

$$|3-4x| = \begin{cases} 3-4x, \text{ si } 3-4x > 0, \\ -(3-4x), \text{ si } 3-4x < 0. \end{cases}$$

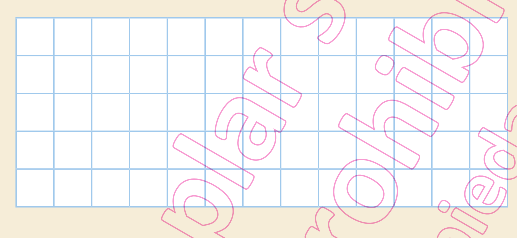
- **Resuelve** las dos siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} 3-4x > 0 \wedge log_2(3-4x) > 5, \quad (1) \\ 3-4x < 0 \wedge log_2[-(3-4x)] > 5, \quad (2) \end{cases}$$

- **Comienza** con (1).

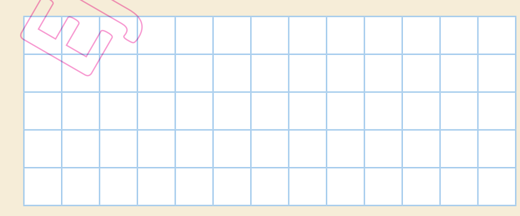


- **Verifica** que el conjunto solución de (1) es $\varnothing$. **Resuelve** (2).



- **Verifica** que el conjunto solución de (2) es $x > \frac{35}{4}$.

  **Busca** la intersección de las soluciones.

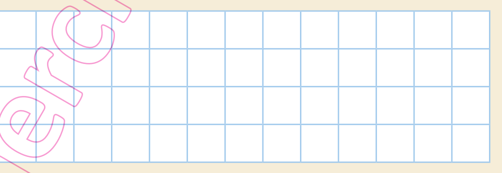


- **Verifica** que el conjunto solución de la inecuación es

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid log_2 |3-4x| > 5\} = \left]\frac{35}{4}, \infty\right[.$$

**2** **Sigue** el proceso y **halla** el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de la inecuación $log_{10}(3x + 2) < -3$.

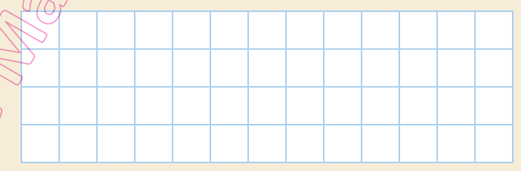
- **Halla** el dominio de $log_{10}(3x + 2)$.



- **Verifica** que el conjunto solución $S$ es el conjunto

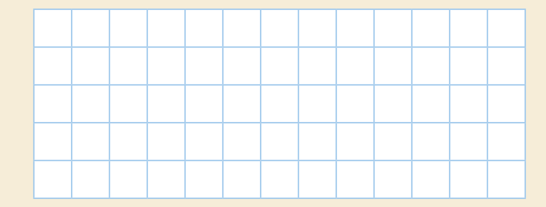
$$S = \left]-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}(-2 + 10^{-3})\right[.$$

**3** **Considera** la inecuación $\exp(2 - 3x) < e^2$. La función $Exp$ está definida en todo $\mathbb{R}$, esto es, $Dom(Exp) = \mathbb{R}$. ¿Cuál es la solución de la inecuación?



**4** **Halla** el conjunto solución de cada una de las inecuaciones que se proponen en cada ítem.

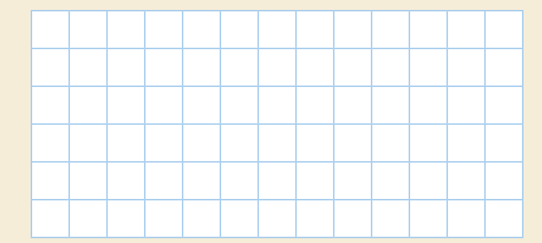
a) $\exp(2x - 1) > 1$.



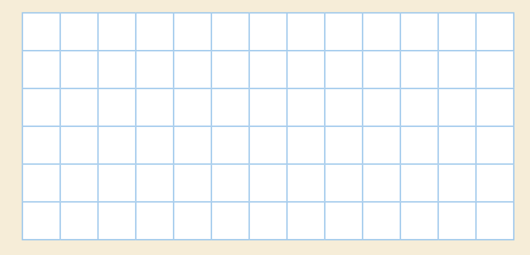
b) $\exp(5 - 2x) \geq \sqrt{e}$.



c) $\exp(x) + \exp(-x) < 2$.

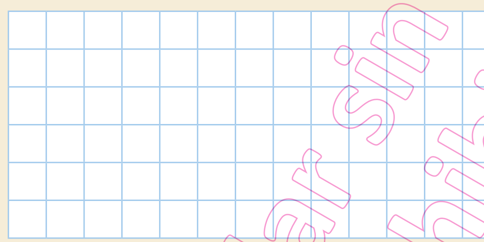


d) $\exp(x + 5) < 20$.

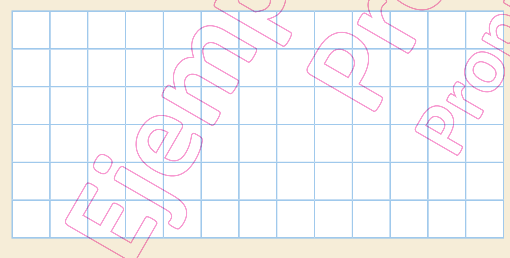


**5** **Halla** el conjunto solución de cada una de las inecuaciones que se proponen a continuación.

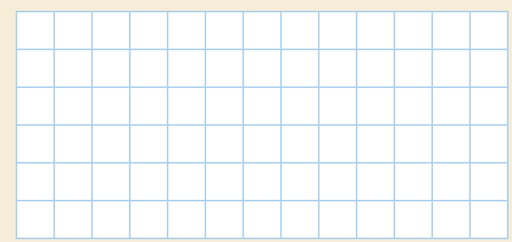
a) $ln(2x + 1) > 3$.



b) $ln(x + 3) < 2$.

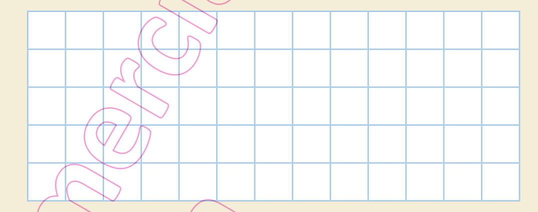


c) $ln\left(\dfrac{1}{2x+3}\right) \leq 5$.



**6** **Halla** el conjunto solución que satisfaga las inecuaciones planteadas; **verifica** con al menos dos valores del conjunto.

a) $ln(e^{4x-3}) < ln(3)$.



b) $ln(3x - 1) + ln(2x + 1) > 0$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Si en el grupo de trabajo existe un compañero con dificultades visuales, debemos permitirle su autonomía. No ayudarle si no lo necesita. Hacerle ver sus posibilidades reales.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** **Resuelvan** las inecuaciones planteadas; **verifiquen** el resultado obtenido con al menos 2 valores del conjunto solución.

a) $log_2(x + 5) < log_2(x + 3)$.

b) $log_5(3x + 7) \geq log_5(4 - 5x) - 1$.

c) $\sqrt{5^{\frac{5x+1}{2}}} > \sqrt{25^{\frac{3x+2}{4}}} \cdot 125$.

d) $\left[(0,09)^{x^2-5x+4}\right]^{\frac{1}{x-1}} < \dfrac{(0,027)^{3x+2}}{(0,002\,43)^{3x+2}}$.

e) $log\left(\dfrac{5x-1}{3x+2}\right) \leq 0$.

f) $5^{3x-1} > 25$.

g) $7^{0,3x-x} \geq 1$.

DCCD: M.5.1.78. Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.



**Saberes previos**

¿Qué es y para qué sirve un modelo matemático?

**Desequilibrio cognitivo**

¿Podrás utilizar el mismo proceso de resolución de inecuaciones exponenciales en la resolución de inecuaciones logarítmicas?

# Aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica

1. Uno de los métodos utilizados para calcular el gasto anual de **depreciación** consiste en asignar una pérdida anual por depreciación decreciente cada año al activo (auto, tractor, computadora, mobiliario, etc). Sea $C$ el costo original del activo, y $r$ la fracción que se pierde de $C$ cada año. Para el valor actual del activo, y $t \geq 0$ para el tiempo en años, escribimos $V(t)$. A continuación se muestra el gasto anual de depreciación. Encontremos la función $V(t)$.

Primer año, $t = 1$, se tiene una pérdida de $rC$, luego,

$$V(1) = C - rC = C(1 - r).$$

Segundo año, $t = 2$, entonces la fracción perdida es $rV(1)$, con lo que

$$V(2) = V(1) - rV(1) = C(1 - r) - rC(1 - r)$$
$$= C - Cr - rC + r^2C = C(1 - 2r + r^2) = C(1 - r)^2.$$

Continuando con este proceso, tercer año, $t = 3$, la fracción perdida es $rV(2)$, en consecuencia,

$$V(3) = V(2) - rV(2) = (1 - r)V(2) = (1 - r)[(1 - r)V(1)]$$
$$= (1 - r)^2V(1) = (1 - r)^2[C(1 - r)] = C(1 - r)^3.$$

De manera general, $V(t) = C(1 - r)^t, \quad t \geq 0.$

El equipo de computación de la empresa *TXYZ* (nombre ficticio) fue adquirido en $ 20 000. Este equipo se deprecia en un valor de 25 % cada año. Entonces,

$$\frac{rC}{C} \times 100 = 25\,\% \Rightarrow r = 25\,\% = 0{,}25 \text{ anual}.$$

La función de depreciación está definida como

$$V(t) = 20\,000(1 - 0{,}25)^t = 20\,000(0{,}75)^t, \quad t \geq 0.$$

En la Figura 4.10. se muestra la gráfica de esta función.

Determinemos el tiempo en el que $V(t) = \frac{1}{2}C$. Tenemos

$$\frac{1}{2}C = V(t) = C(0{,}75)^t \Leftrightarrow \frac{1}{2} = (0{,}75)^t$$

$$\Leftrightarrow -ln(2) = t\, ln(0{,}75) \Leftrightarrow t = -\frac{ln(0{,}75)}{ln(2)}.$$

A este tiempo $t$ se lo designa con $t_{\frac{1}{2}}$, y se llama tiempo de vida media esto es,

$$t_{\frac{1}{2}} = -\frac{ln(0{,}75)}{ln(2)} \simeq 2{,}41 \text{ años}.$$

**Glosario**

**depreciación.** Disminución del valor o precio de algo con relación al que antes tenía o comparándolo con otras cosas de su clase.

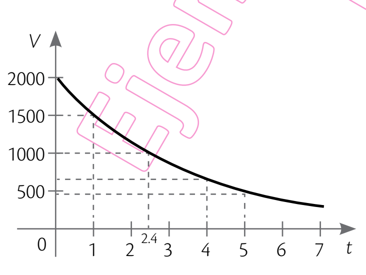



Figura 4.10.

2. El Instituto *ABCD* capacita a personal en diferentes áreas, como carpintería, plomería, entre otras. Para evaluar el aprendizaje y desempeño de sus estudiantes, aplica una función que se define a continuación:

$$f\colon \begin{cases} I \to [0, \infty[ \\ t \to f(t) = a - cb^t, \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, tal que $a \geq c$ y $0 < b < 1$, $I \subset [0, \infty[$ no vacío.

En la rama de corte y confección, Juan ha completado el curso teórico y pasa a la parte práctica. El resultado se mide al final de cada semana. En la primera semana, Juan tiene confeccionados 2,5 ternos. En la segunda semana, logra confeccionar 3 ternos y dos tercios de otro. En la tercera semana, alcanza 4 ternos y $\frac{4}{9}$ de otro.

Calculemos las constantes $a, b, c$. Tracemos la gráfica de esta función y analicemos su comportamiento. Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2{,}5 = f(1) = a - cb, \ (1); \\ \frac{11}{3} = f(2) = a - cb^2, \ (2); \\ \frac{40}{9} = f(3) = a - cb^3, \ (3). \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $a = 2{,}5 + cb$. Reemplazamos en (2) y (3):

$$\begin{cases} \frac{11}{3} = 2{,}5 + cb - cb^2 \\ \frac{40}{9} = 2{,}5 + cb - cb^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{6} = cb - cb^2 = cb(1-b), & (4) \\ \frac{35}{18} = cb - cb^3 = cb(1-b)(1+b). & (5) \end{cases}$$

De (4) obtenemos $c = \dfrac{\frac{7}{6}}{b(1-b)}$, y en (5):

$$\frac{35}{18} = \frac{\frac{7}{6}}{b(1-b)} b(1-b)(1+b) = \frac{7}{6}(1+b),$$

de donde $b = \frac{2}{3}$. Con este valor calculamos $a$ y $c$.

$$c = \frac{\frac{7}{6}}{b(1-b)} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \frac{21}{4}, \ a = 2{,}5 + bc = 2{,}5 + \frac{21}{4} \times \frac{2}{3} = 6.$$

El conjunto $I$ es el intervalo $[1, \infty[$. La función $f$ está definida como

$$f(t) = 6 - \frac{21}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^t, \quad t \in [1, \infty[.$$



**Recuerda que...**

Para la función obtenida en el problema dos $f(t) = 6 - \frac{21}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^t$, $t \in [1, \infty[$, podemos definir la función $f$ en el intervalo $[0, \infty[$. Tenemos $f(0) = 0{,}75$.

Para $t$ suficientemente grande, $\frac{21}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^t$ es suficientemente pequeño, con lo que $f$ tiene una asíntota horizontal.

La gráfica de esta función se muestra en la Figura 4.11.

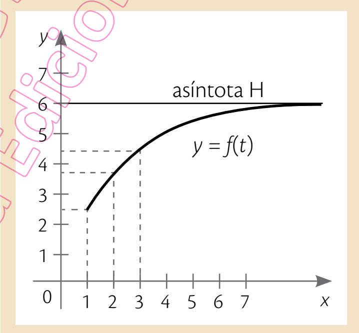



Figura 4.11.

$H = \{(t, 6) \mid t \in [1, \infty[\}$

Calculemos $f(8)$.

$f(8) = 6 - \frac{27}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^8 \simeq 5{,}74$,

que muestra que a partir de la octava semana puede confeccionar aproximadamente 6 ternos semanales.

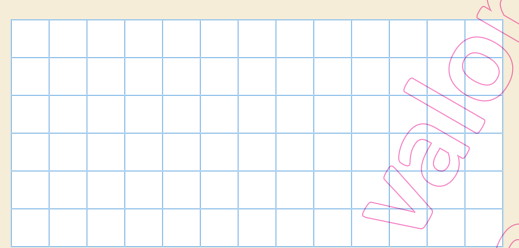
# Taller práctico

DCCD: M.5.1.78. Reconocer y resolver aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones exponenciales o logarítmicas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

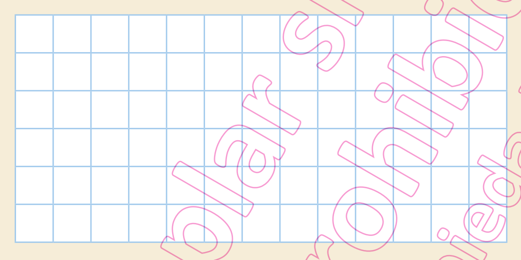
**1** La empresa ABCD (nombre ficticio) decide suprimir la producción de un tipo de cacerolas a partir de esta fecha. En este día se tienen 2 000 cacerolas. La función de ventas semanales de cacerolas está definida como sigue:

$$S(t) = 2\,000\left(\frac{2}{5}\right)^t, \quad t \geq 0.$$

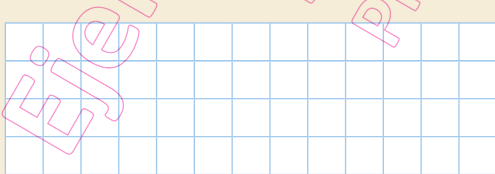
a) **Calcula** el número de cacerolas vendidas en las primeras semanas y **presenta** los resultados en una tabla.



b) **Traza** la gráfica de esta función.



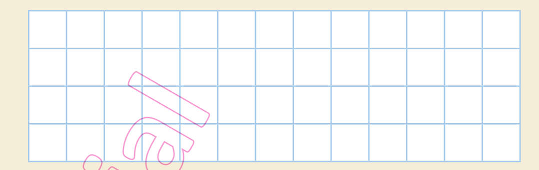
c) **Muestra** que esta función es estrictamente decreciente en [0, ∞[.



d) **Calcula** $t$, tal que $S(t) = 1$.



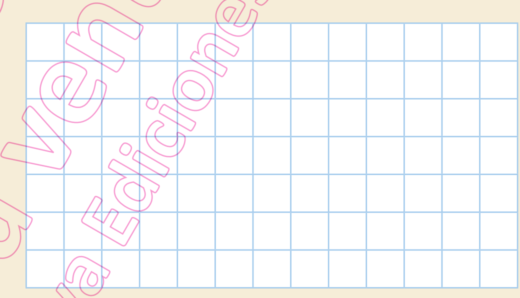
e) **Determina** el intervalo en el que $S(t) \geq 500$.



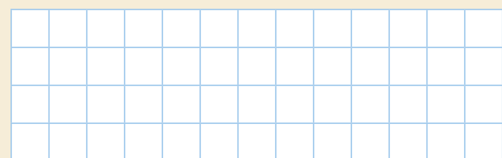
**2** La función de ventas semanales de cacerolas está definida como

$$S(t) = 150 + 200\left(\frac{2}{5}\right)^t, \quad t \geq 0.$$

a) **Representa** gráficamente esta función.



b) ¿A partir de qué semana se tiene $2\,000\left(\frac{2}{5}\right)^t < 1$? O sea, ¿a partir de qué semana ya no se venden las 150 cacerolas?



**3** Paúl estudia diseño gráfico y realiza sus prácticas en una empresa de impresión, durante 10 semanas. Debe atender a una diversidad de clientes que quieren imprimir diferentes tipos de documentos ya elaborados. En la tabla se muestran los resultados alcanzados.

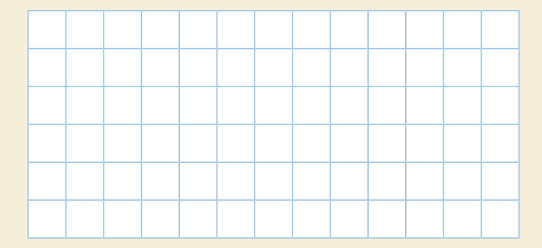
| *Semana* | *Número de clientes atendidos* |
|---|---|
| 1 | 80 |
| 2 | 120 |
| 3 | 152 |

**Determina** una función $A$ definida como

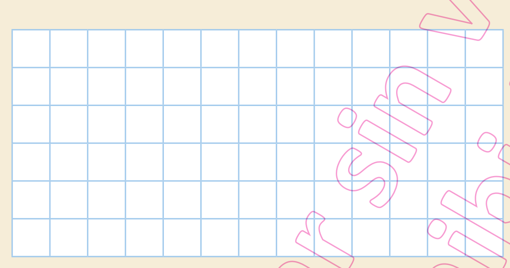
$$A: \begin{cases} [1, \infty[ \to \mathbb{R} \\ t \to A(t) \end{cases}, \quad \text{con } A(t) = a - bc^t,$$

siendo a, b, $c$ constantes reales por determinar. La meta de Paúl es atender al menos a 6 personas por hora.

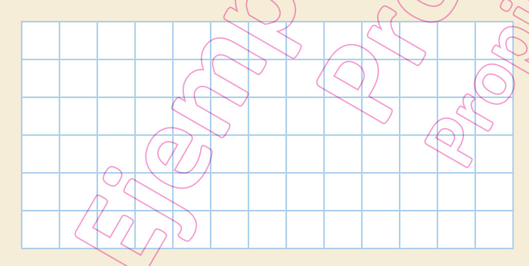
a) **Utiliza** la información suministrada y **obtén** las constantes $a$, $b$, $c$ y, por lo tanto, $A(t)$.



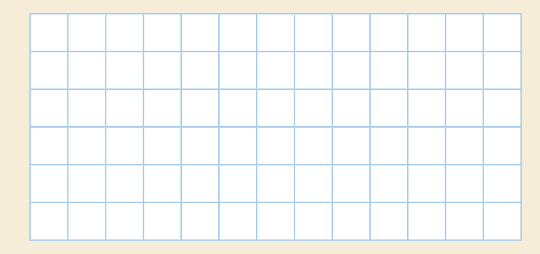
b) **Muestra** que a las 10 semanas de prácticas, Paúl puede atender trabajos de 253 personas por semana, algo más de 6 personas por hora.



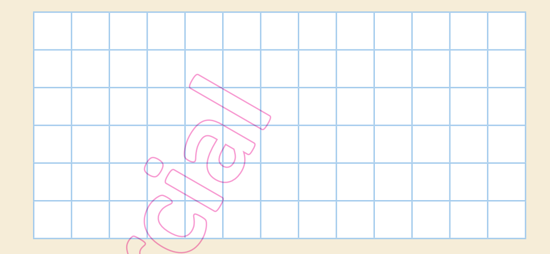
c) **Traza** la gráfica de la función $A$ y de la asíntota $H = \{(280, t) \mid t \geq 1\}$.



d) **Determina** $\hat{t} \in [1, \infty[$, tal que $A(\hat{t}) = 6$.



e) **Determina** $S = \{t \in [1, \infty[ \mid A(t) \geq 6\}$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando existe un compañero con discapacidad visual no se debe evitar palabras relativas a la visión, es necesario aceptarlo al estudiante como es.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

4 **Consideren** la función $f$ definida como $f(x) = ae^{bx}$, $x \geq 0$. Si $f(0) = 5$ y $f(2) = 10$, **determinen** las constantes $a$ y $b$.

5 Un producto electrónico fue introducido en el mercado hace 10 años. El primer año, su costo fue de \$ 738,5; y el segundo año fue de \$ 682. La depreciación por el desarrollo tecnológico se modela con una función del tipo

$$P(t) = P_0 e^{-kt}, \quad t \geq 0,$$

siendo $P_0$, $k \in \mathbb{R}^+$, con $P_0$ el costo inicial de producto, y $k$ la tasa de depreciación.

a) **Calculen** $P_0$ y $k$, y **definan** la función $P$.

b) **Verifiquen** que en 8,664 años, se deprecia a la mitad del costo inicial de producto, o sea, \$ 400,00.

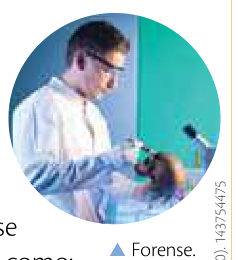
c) **Tracen** la gráfica de la función $P$.

d) **Exhiban** tres ejemplos de productos diferentes, que muestren una tendencia similar a este ejemplo.

# Solución de problemas cotidianos

## La edad de los fósiles

**1.** $^{14}C$ es la nomenclatura del carbono 14, descubierto en 1940. Este es un isótopo que, por medio de procesos de laboratorio, permite conocer la edad de un fósil. Para esto se utilizan modelos matemáticos como:



▲ Forense.

Shutterstock, (2020). 143754475

$$C_{(t)} = C_{(0)}e^{-0{,}000\,120\,5t} \text{ ó } C(t) = C_{(0)}2^{\frac{-t}{5\,600}},$$

de donde:

$C_{(t)}$: es la cantidad de gramos del fósil que se encuentran al final de una línea de tiempo.
$C_{(0)}$: es la cantidad de gramos del fósil que se encuentran al iniciar el análisis.
$t$: es el tiempo expresado en años.

Cuando un fósil es muy viejo, se aplican otros métodos para conocer su edad, como la medición radiométrica.

### El problema

En 1802, al pie del volcán Imbabura, se encontró un fósil de un mastodonte. Si se tomaron como muestra 500 gramos de carbono 14, ¿cuántos años deben transcurrir para que esta muestra se convierta en 150 gramos?

### Análisis de los datos

Se aprecia la existencia de un gramaje inicial y final $C_{(t)} = 150$ g y $C_{(0)} = 500$ g.

### Modelización

Utiliza cualquiera de los métodos planteados, por ejemplo:

$$C_{(t)} = C_{(0)}e^{-0{,}000\,120\,5t};\ 150 = 500e^{-0{,}000\,120\,5t}.$$

Aplica las propiedades de los logaritmos
$ln150 = ln500 + (-0{,}000\,120\,5)t\ ln\ e$

$$t = \frac{ln500 - ln150}{(0{,}000\,120\,5)ln\ e};\ t = \frac{1{,}203\,972\,804}{0{,}000\,120\,5}.$$

$t = 9\,991$ años.

### Interpretación

Deben transcurrir 9 991 años para que la muestra obtenida se desintegre a 150 gramos.

### Generalización

El modelo exponencial $C_{(t)} = C_{(0)}e^{-0{,}000\,120\,5t}$ permite conocer el tiempo de desintegración de un fósil, mediante la aplicación de las propiedades de los logaritmos.

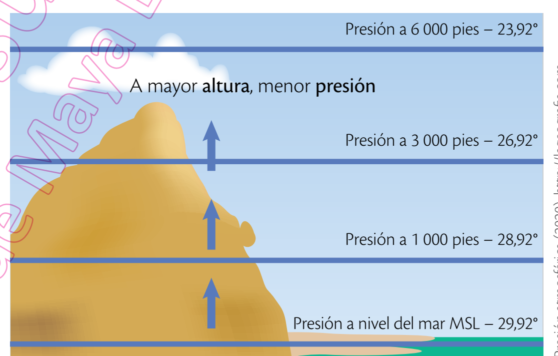
### Actividad

¿Cuántos gramos se encuentran presentes si han transcurrido 500, 1 000, 2 000 y 3 000 años?

**Traza** la gráfica, **analiza** los resultados, **escribe** el modelo exponencial e **interpreta** la gráfica y los datos obtenidos.

**[ Practica en tu cuaderno ]**

**2.** La presión atmosférica varía según la altura: a mayor altura, menor es la presión. Es decir, es una relación inversamente proporcional. La expresión $A = A_{(0)}(0{,}996)^x$ permite determinar la altura en kilómetros o la presión en milibares (mbar).




Presión atmosférica (2020). http://lageografia.com

a) **Indaga** a qué altura sobre el nivel del mar se encuentran cinco provincias del Ecuador. **Determina** la presión existente en cada provincia. **Traza** la gráfica.
b) Cierta localidad está a 4 500 metros sobre el nivel del mar. ¿Qué presión existe en este lugar?
c) Si la presión es de 339 mbar, ¿cuál es la altura de este lugar?
d) Si la presión es de 120 mbar, ¿cuál es la altura de este lugar?

**Glosario**

**fósil.** Dicho de una sustancia de origen orgánico o de un resto de organismo: que esta mas o menos petrificado, y se encuentra por causas naturales en las capas terrestres, especialmente si pertenece a otra epoca geológica.

## Desafíos científicos

# La matemática y la Ingeniería en Genética y Biotecnología

¿Cuál es el profesional que estudia los procesos de la herencia, naturaleza y funcionamiento del material genético (célula normal y patológica)? ¿Cómo aporta la matemática al análisis de biosistemas?

La Ingeniería en Genética aplica tecnologías recombinantes en programas de innovación genética. Estos se diseñan para el mejoramiento de plantas, animales y microorganismos, con aplicaciones en agricultura, alimentos y salud.

La Ingeniería Genética utiliza modelos matemáticos para explicar procesos crecientes y decrecientes en el desarrollo de nuevos productos, tales como semillas, bioplaguicidas, vacunas, entre otros.



Shutterstock, (2020). 539604025

▲ Trabajo en genética.

## La matemática y las profesiones

# Ingeniería en Genética y Biotecnología

El ingeniero o la ingeniera en Genética y Biotecnología es una persona profesional conocedora de los bioprocesos y métodos biotecnológicos, y posee gran capacidad para investigar, diseñar y aplicar tecnologías en áreas como microorganismos, animales, vegetales, humanos y ambiente. A través de técnicas genéticas, moleculares y celulares, puede aislar y manipular biomoléculas y microorganismos. Asimismo, mediante el uso de técnicas de biología molecular, microbiología y bioquímica, puede producir nuevos medicamentos, alimentos y plantas.

El campo laboral incluye medicina, agricultura, industria alimenticia, industria farmacéutica, cuidado del medio ambiente, entre otros.

El postulante para la carrera de Ingeniería en Genética y Biotecnología debe cumplir con el siguiente perfil:

- Habilidades prácticas, pensamiento crítico, uso de herramientas y técnicas de laboratorio.
- Conocimientos de biología, química, matemática, física e investigación.
- Interés científico y técnicas de estudio.

Adaptado de: http://www.udla.edu.ec/carreras/programas-academicos/pregrados/facultad_de_ingenieria_y_ciencias_agropecuarias/ingeniero-en-biotecnologia/



Shutterstock, (2020). 506025838

▲ Ingeniería en Genética.

### Glosario

**biotecnología.** Empleo de celulas vivas para la obtención y mejora de productos útiles, como los alimentos y los medicamentos.

**genética.** Parte de la biología que trata de la herencia y de lo relacionado con ella.

## Gráfico de funciones exponenciales con GeoGebra

a) **Grafica** una función $f(x) = a^x$ $a > 1$. Luego, **realiza** los desplazamientos horizontales y verticales.

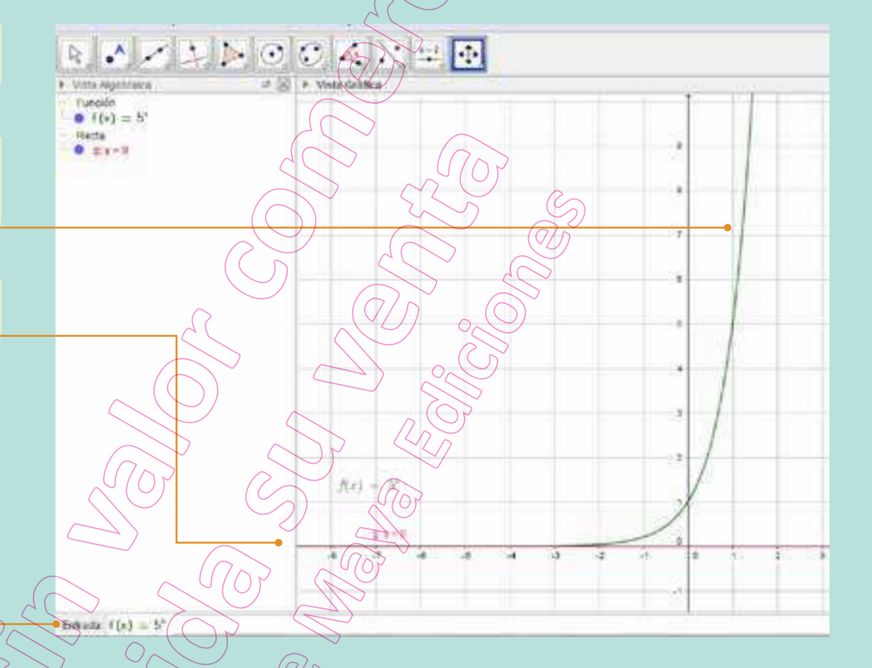
$f(x) = a^{(x+b)}$, $f(x) = a^x + b$.

Sea la función $f(x) = 5x$, **analiza** su gráfica.

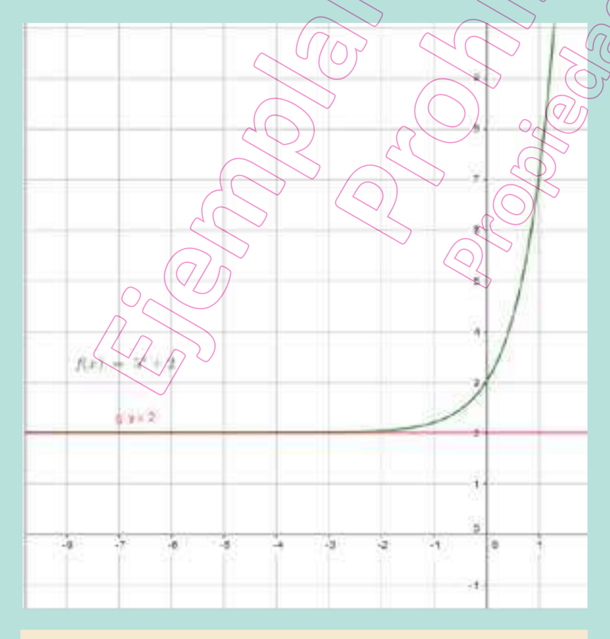
**1.** En la barra de *Entrada*, **ingresa** la función $f(x) = 5x$.

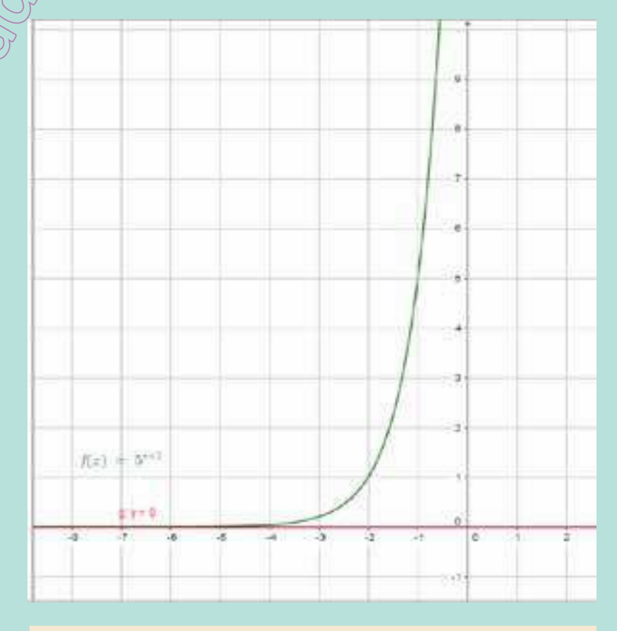
**2.** La gráfica de la función $f(x) = 5x$ es creciente, porque $a > 1$.

**3.** La función tiene asíntota horizontal en $y = 0$.



**Traza** las gráficas de $f(x) = 5^x + 2$ y de $f(x) = 5^{(x+2)}$. **Analiza** qué sucede en cada caso.





**4.** La función $f(x) = 5^x + 2$ se desplazó dos unidades hacia arriba, al igual que su asíntota, $y = 2$. La función sigue siendo creciente.

**5.** La función $f(x) = 5^{(x+2)}$ se desplazó dos unidades a la izquierda, y la asíntota se mantiene en $y = 0$. La función sigue siendo creciente.

# Gráfico de funciones logarítmicas con GeoGebra

b) **Grafica** una función $f(x) = log_a x$ con $a > 0$, $a \neq 1$. Luego, **realiza** los desplazamientos horizontales y verticales.

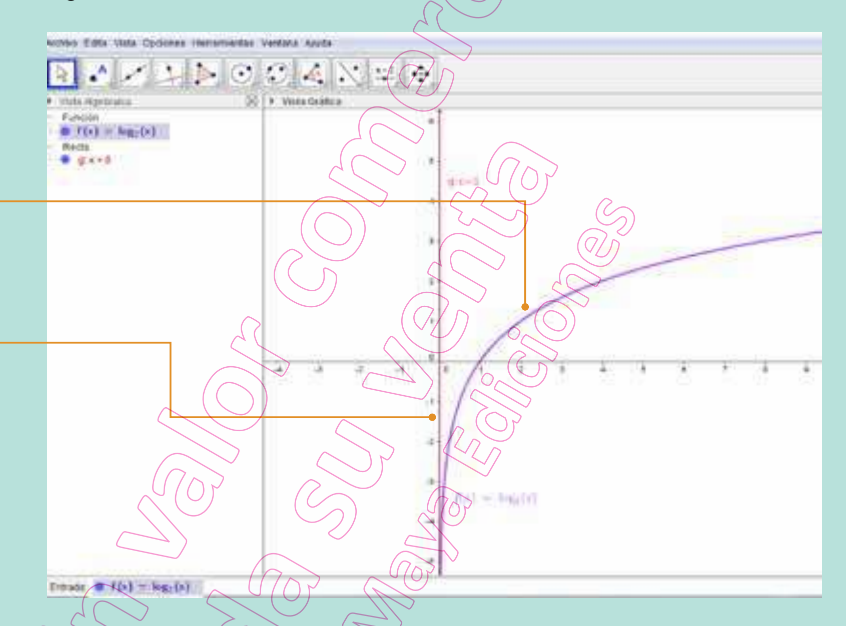
$f(x) = log_a x + 2$ y $f(x) = log_a(x + 2)$.

Sea la función $f(x) = log_2 x$, **analiza** su gráfica.

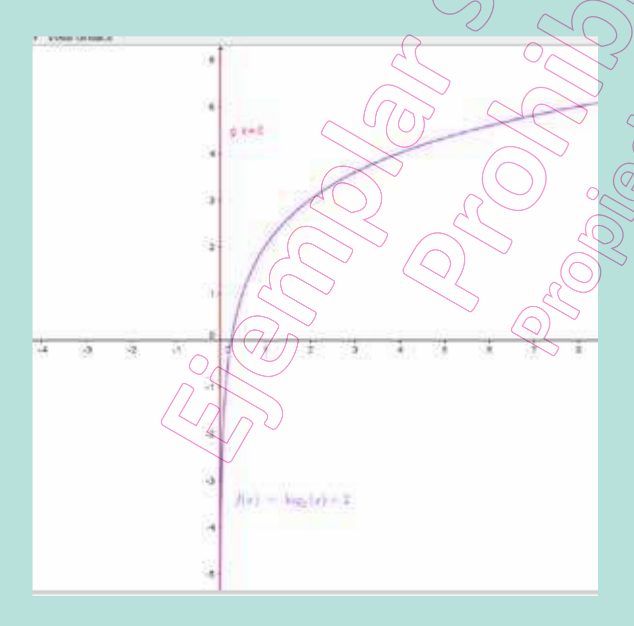
**1.** En la barra de *Entrada*, **ingresa** la función $f(x) = log_2 x$.

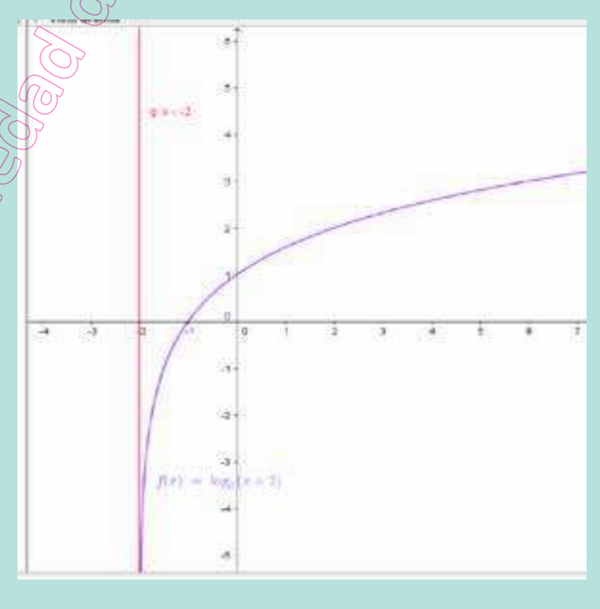
**2.** La gráfica de la función $f(x) = log_2 x$ es creciente.

**3.** La función tiene asíntota vertical en $x = 0$.



**Traza** las gráficas de $f(x) = log_2 x + 2$ y de $f(x) = log_2(x + 2)$. **Analiza** qué sucede en cada caso.





**4.** La función $f(x) = log_2 x + 2$ se desplazó dos unidades hacia arriba, y su asíntota, $x = 0$. La función sigue siendo creciente.

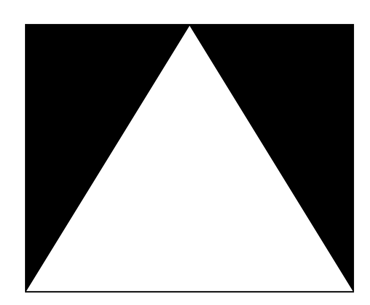
**5.** La función $f(x) = log_2(x + 2)$ se desplazó dos unidades a la izquierda, al igual que su asíntota que ahora es $x = -2$. La función sigue siendo creciente.

# Desafíos y proyectos matemáticos

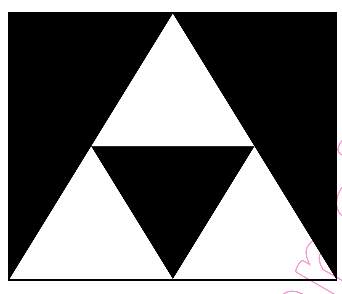
## Tema: El triángulo de Sierpinski

### Recursos

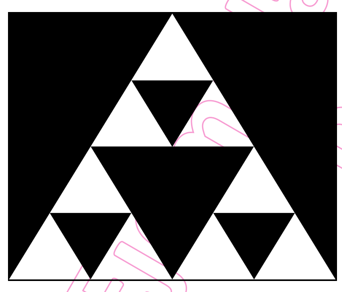
- Tecnológicos: calculadora, *tablet*, celular, computadora con la aplicación GeoGebra y el programa Excel instalados



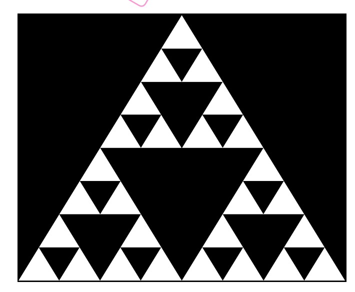
▲ Posición 0



▲ Posición 1



▲ Posición 2



▲ Posición 3

### Justificación

El triángulo de Sierpinski fue introducido por Waclaw Sierpinski en el año 1919. Consta de un triángulo equilátero y en su interior se van trazando otros triángulos equiláteros, cuyas esquinas coinciden con los puntos medios de cada lado del triángulo mayor.



Estudiantes en equipo. ▲

Shutterstock, (2020). 427333528

La utilización de este famoso triángulo es diversa: desde el cálculo de áreas y perímetros, hasta el modelamiento de problemas matemáticos que están compuestos por regularidades.

A continuación, se presenta una imagen de este triángulo.

### Objetivos

- Observar las regularidades del triángulo de Sierpinski para determinar un modelo exponencial que permita relacionar la cantidad de triángulos blancos con la posición de la figura.

### Actividades

- Formen equipos de dos o tres estudiantes y elijan un coordinador o coordinadora.
- Van a trabajar con funciones cuya representación gráfica descubrirán durante el análisis de la secuencia.
- Analicen el triángulo de Sierpinski y completen la tabla siguiente:

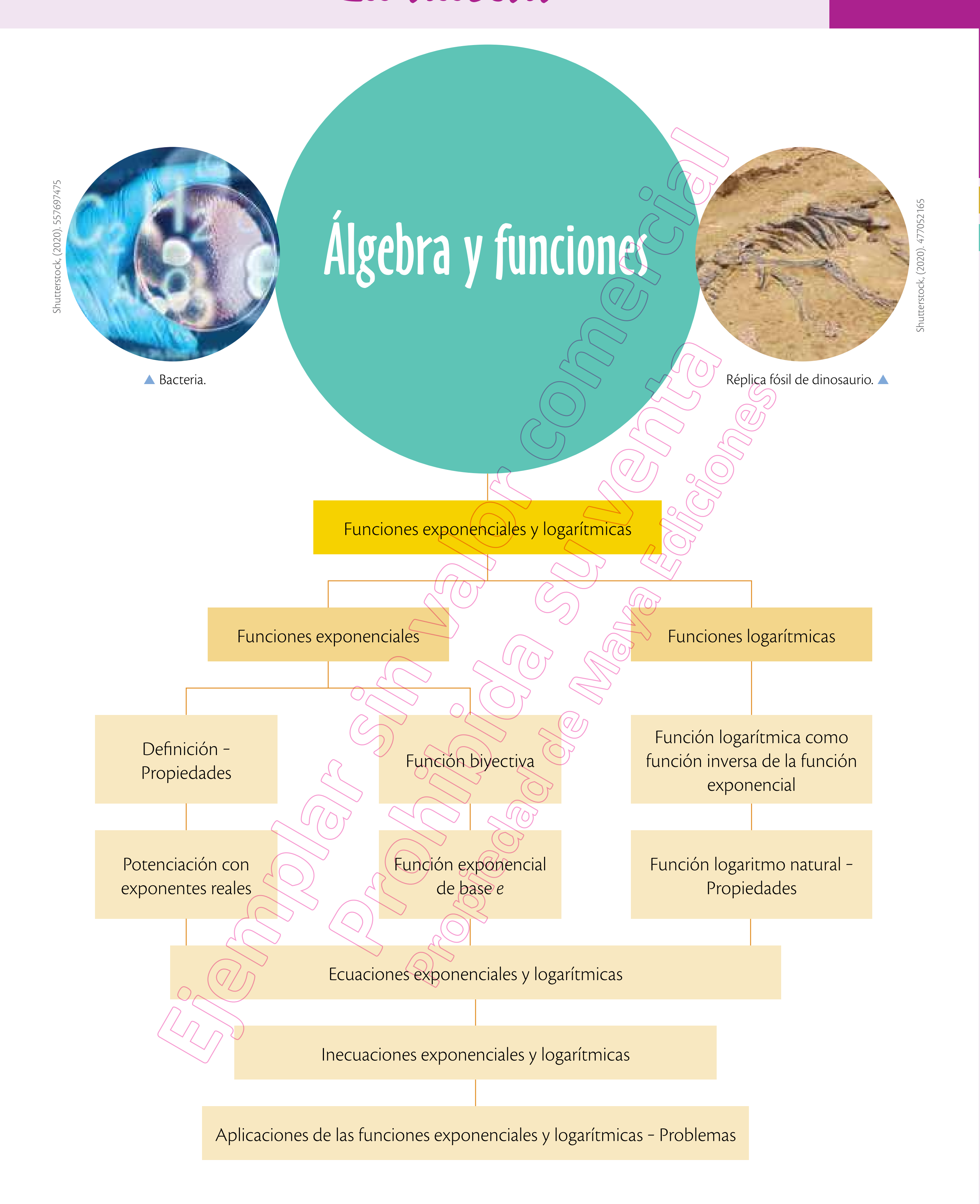
| *Posición* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Núm. de triángulos blancos* | | | | | | |

- Construyan una gráfica con los valores encontrados. Para ello, pueden utilizar el programa GeoGebra o Excel.
- Encuentren una fórmula que relacione la cantidad de triángulos blancos con la posición que ocupa la figura.
- Respondan las siguientes preguntas: ¿En alguna posición la cantidad de triángulos será 512? ¿Cómo se llama la función encontrada?
- Establezcan conclusiones y recomendaciones.

### Conclusiones

La intencionalidad de esta propuesta es lograr, por medio de la observación de la secuencia de las figuras, que se establezcan regularidades para que, de esta manera y utilizando la tabla de datos, se pueda generar un modelo matemático que represente la situación planteada.

# En síntesis

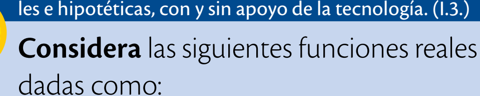


Shutterstock, (2020). 55769745
Álgebra y funciones
Shutterstock, (2020). 477052165
Bacteria.
Réplica fósil de dinosaurio.
Funciones exponenciales y logarítmicas
Funciones exponenciales
Funciones logarítmicas
Definición - Propiedades
Función biyectiva
Función logarítmica como función inversa de la función exponencial
Potenciación con exponentes reales
Función exponencial de base *e*
Función logaritmo natural - Propiedades
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
Inecuaciones exponenciales y logarítmicas
Aplicaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas - Problemas

# Evaluación sumativa

**[Heteroevaluación]**

M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de $a^x$, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones reales e hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3.)



**1** **Considera** las siguientes funciones reales dadas como:
$f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^{-x} + 1$, $f_3(x) = 2^x - 3$.

a) **Establece** su dominio y recorrido.

b) **Determina** las ecuaciones de las asíntotas a las gráficas de las funciones.

c) **Traza** en el mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones.

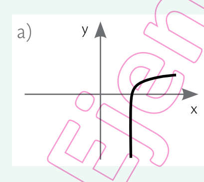
**2** **Analiza** las siguientes funciones:
$g(x) = log_3\, x$; $h(x) = log_3\,(x + 2)$.

a) **Encuentra** el dominio de $h$ y **escribe** la ecuación de la asíntota vertical.

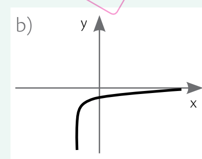
b) **Describe** cómo se puede obtener la gráfica de $h$ a partir de la gráfica de $g$.

c) **Traza** en un mismo plano cartesiano las dos funciones.

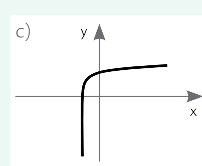
**3** **Asocia** cada gráfico con la función que le corresponde.




$y = Log\,(x + 1) + 2.$




$y = Log\,(x + 2) - 1.$




$y = Log\,(x - 2) + 1.$

**4** Sea $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 4}$. **Aplica** las leyes de los logaritmos para escribir $ln\, f(x)$ como una expresión que incluya sumas, diferencias y múltiplos de los logaritmos naturales.

a) $\frac{1}{2}\, ln\, x + \ln(x^2 + 5).$

b) $ln\, 2 + \ln x - ln(x - 1).$

c) $\frac{1}{2}\, ln\, x - 2ln(x - 1) - \frac{1}{3}ln(x^2 + 1).$

**5** **Usa** una calculadora para completar la tabla. **Anota** cada valor con aproximación hasta diezmilésimas (cuatro cifras).

| $n$ | 2 | 10 | 100 | 500 | 1 000 | 5 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | | | | | | |

**6** **Resuelve** el siguiente problema.
Una sustancia radiactiva se desintegra (y se convierte en otro elemento químico) de acuerdo con la fórmula $y = Ae^{-0{,}2x}$, donde $y$ es la cantidad remanente después de $x$ años.

a) Si tenemos la cantidad inicial $A = 80$ gramos, ¿qué cantidad quedará después de 3 años?

b) La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en descomponerse la mitad de dicha sustancia. **Encuentra** la vida media de esta sustancia, en la que $A = 80$ gramos.

**7** **Escribe** verdadero (V) o falso (F). **Justifica** tu respuesta.

a) $log(2) + log(3) = log(5).$

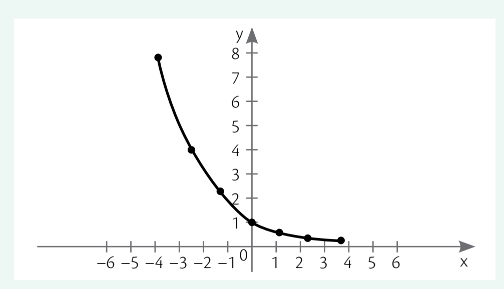
b) $log(2) + log(3) = log(6).$

c) $log(15) - log(5) = log(3).$

d) $2log(4) = log(2^4).$

**Resuelve** cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

**8** La gráfica siguiente, ¿a qué función corresponde?




a) $f(x) = 2^x$.

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

d) $f(x) = (3)^x$.

**9** La solución de la ecuación $log_8 (x - 6) + log_8 (x + 6) = 2$ es:

a) 10. b) −10. c) ±10. d) $10^2$.

**10** El dominio de la función $y = ln (x - 2)$ es:

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} - \{2\}$.

c) $[2, \infty]$.

d) $]2, \infty[$.

**11** La solución para $t$: $e^{ln(2t-1)} = 5$ es:

a) 3. b) 2. c) $\frac{2}{5}$. d) 5.

**12** La solución de la inecuación $log(x^2 + 6x + 10) > 0$ es:

a) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

d) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

**13** La solución para $3^{x^2-5} = 81$ es:

a) $x = \pm 3$.

b) $x = -3$.

c) $x = 3$.

d) $x = 8$.

## [Autoevaluación]

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Obtengo la gráfica de funciones exponenciales. | | | |
| Analizo las gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas. | | | |
| Aplico propiedades de los logaritmos para resolver problemas. | | | |
| Determino el dominio de funciones exponenciales y logarítmicas | | | |

## [Coevaluación]

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Participamos activamente en los trabajos grupales. | | | |
| Utilizamos la tecnología para graficar funciones exponenciales y logarítmicas. | | | |

## [Metacognición]

a) ¿De qué manera el uso de las Tic te ayudó con los temas de esta unidad?

______________________________

b) ¿En qué se aplica el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas?

______________________________

# Programación lineal y regresión lineal

## Programación lineal y vida cotidiana

Son múltiples las aplicaciones de la programación lineal (PL). Una de ellas, por ejemplo, se da en el marketing y la publicidad. Ahí se tiene un presupuesto que debe distribuirse entre las opciones de televisión, radio, prensa escrita, y otros medios de comunicación. De igual manera, las empresas toman decisiones acerca de la cantidad de artículos que deben producir para maximizar los beneficios, sin dejar de cumplir los requerimientos establecidos. En el sector de la vigilancia de efectivos policiales, las patrullas deben ser distribuidas en las calles, de tal forma que se minimicen los tiempos de respuesta y se efectivicen las acciones. Otra de las aplicaciones de PL se da en los hospitales, cuando se necesita determinar la dieta que debe recibir cada paciente con las cantidades nutritivas mínimas y con optimización de recursos.

Como verás, la PL cobra gran importancia en nuestra vida diaria.

Adaptado de: https://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Aplicaciones_PL.pdf





## Observa y contesta

- ¿Qué información matemática puedes deducir de cada imagen de esta página?
- ¿De qué manera la matemática puede mejorar el transporte en tu ciudad?
- ¿Cómo programarías tu tiempo para optimizar los recursos de los que dispones?



Shutterstock, (2020). 280122308

Shutterstock, (2020). 368018234, 294977321



# 5 unidad

**Bloques curriculares**

Geometría y medida
Estadística y probabilidad

## Objetivos

- O.G.M.2. Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

- O.G.M.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

- O.G.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Ministerio de Educación, (2016).

DCCD: M.5.2.24. Aplicar la divisibilidad de números enteros, el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros, y la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (con soluciones enteras no negativas) en la solución de problemas.



**Saberes previos**

¿Cuándo un número es divisor de otro?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Cuáles son los términos de una división?

# Ecuación lineal con dos incógnitas. Soluciones enteras

## Divisibilidad en $\mathbb{Z}$. Aplicaciones

**Definición.** Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Se dice que $m$ divide a $n$, lo cual se escribe $m|n$ si existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $n = km$. En tal caso, se dice que $n$ se factoriza en la forma $km$, y que $m$ es un divisor de $n$.

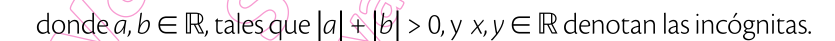
**Definición.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$.

1. Un número $d \in \mathbb{Z}^+$ se dice divisor común de $a$ y $b$ si $d|a$ y $d|b$.
2. El máximo común divisor de $a$ y $b$ es el número entero $c \in \mathbb{Z}^+$ que verifica las condiciones siguientes:
   i. $c|a$ y $c|b$. ii. Si $d \in \mathbb{Z}^+$ es un divisor común de $a$ y $b$, entonces $d|c$.
   Escribiremos $c = mcd(a, b)$.

## Ecuación lineal con dos incógnitas. Soluciones enteras no negativas

Consideramos ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma

$$ax + by = c,$$


donde $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $|a| + |b| > 0$, y $x, y \in \mathbb{R}$ denotan las incógnitas.

Nos interesamos ahora en la búsqueda de soluciones enteras positivas, cuando $a, b \in \mathbb{Z}$ es decir, en hallar $m, n \in \mathbb{Z}^+$, tales que $am + bn = c$.

*Ejercicio resuelto*

1) Considerar la ecuación $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $2x + 3y = 10$.
Determinar todas las soluciones enteras de esta ecuación, esto es, hallar $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, tal que $2m + 3n = 10$.

Supongamos $m, n \in \mathbb{Z}$, tales que $2m + 3n = 10$. Entonces, $3n = 10 - 2m$. De esta igualdad se deduce que $2(5 - m)$ debe ser múltiplo de 3. Esto es posible si $5 - m$ es múltiplo de 3, o sea, $5 - m = 3j$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Es decir, $m = 5 - 3j$ y, en consecuencia, $3n = 2(5 - m) = 6j$, de donde $n = 2j$. Tenemos así,

$$\begin{cases} m = 5 - 3j, \\ n = 2j, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Veamos algunas soluciones enteras:

| $j$ | −1 | −2 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 8 | 11 | 5 | 2 | −1 |
| $n$ | −2 | −4 | 0 | 2 | 4 |

Las soluciones enteras están representadas en el conjunto solución

$$S = \{(5 - 3j, 2j) \mid j \in \mathbb{Z}\}.$$



**Recuerda que...**

- Se dice que dos números enteros $a$ y $b$ son primos entre sí, si $mcd(a, b) = 1$.
- Sean $a, b, x \in \mathbb{Z}$ no nulos. Entonces, $mcd(xa, xb) = x \cdot mcd(a, b)$.
- El múltiplo común de $a$ y $b$ se define como $p \in \mathbb{Z}^+$, tal que $a|p$ y $b|p$. El mínimo común múltiplo de $a$ y $b$, que se denota $mcm(a, b)$, se define como el más pequeño número entero $p \in \mathbb{Z}^+$, tal que $a|p$ y $b|p$.

Nota que $m$, $n$ son soluciones de la ecuación. En efecto,

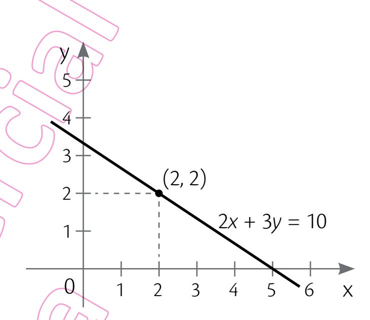
$$2m + 3n = 2(5 - 3j) + 3(2j) = 10 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ahora nos interesamos en las soluciones positivas, es decir, en $m, n \in \mathbb{Z}^+$, tales que $2m + 3n = 10$.

Primeramente, la recta $L$ corta el eje $x$ en el punto $(5, 0)$ y al eje $y$ en $\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$. Luego, $\begin{cases} 0 \leq x \leq 5, \\ 0 \leq y \leq \dfrac{10}{3} \end{cases}$. Para $m, n \in \mathbb{Z}^+$ se deben verificar las desigualdades $1 \leq m \leq 5$, y $1 \leq n \leq 3$. Resulta así,

$$1 \leq m \leq 5 \Leftrightarrow y\ 1 \leq 5 - 3j \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq -3j \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 3j \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} j = 0, \\ j = 1. \end{cases}$$

Para $j = 0$, $m = 5$, $n = 0$ la solución no es positiva, $j = 1$, $m = 2$, $n = 2$ es la única solución positiva. (Ver figura 5.1).




▲ Figura 5.1. Esta es la recta L y la única solución entera positiva.



## Aplicaciones

Un terreno tiene 10 000 m² (una hectárea) y se divide en dos partes: una para producción de pastos, y otra para producción de verduras y hortalizas. Para el efecto, el terreno se divide en lotes de 200 m², destinados a verduras y hortalizas, y de 500 m² para pastizales. ¿Cuántos lotes para pastos y cuántos para verduras y hortalizas pueden obtenerse?

Designamos con $x$ el número de lotes para verduras y hortalizas ($VH$), con lo que el área destinada a este propósito es $200x$. Por su parte, $y$ es el número de lotes para pastos ($P$) y su área es $500y$. Entonces

$$200x + 500y = 10\,000,$$

y dividiendo por 100, resulta

$$2x + 5y = 100, \text{ de donde } 5y = 100 - 2x.$$

De esta igualdad, si $y \in \mathbb{Z}$, el número entero 5 es múltiplo de 5, luego, el lado derecho de la igualdad precedente $100 - 2x = 2(50 - x)$ debe ser divisible por 5, esto es, $x = 5j$ con $j \in \mathbb{Z}$. Así,

$$5y = 100 - 2x = 100 - 2(5j) = 10(10 - j),$$

y de esta se obtiene $y = 2(10 - j)$, $j = 1, 2, \ldots, 9$.

Nota que $10 - j \geq 1$, entonces, $j < 9$.

Así, $\begin{cases} x = 5j, \\ y = 2(10 - j), \end{cases}$ $\quad j = 1, 2, \ldots 9$ son soluciones enteras positivas.

En la siguiente tabla se muestran las soluciones:

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
| $y$ | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 |

### Interdisciplinariedad

La aplicación de las ecuaciones lineales con dos incógnitas es múltiple. Por ejemplo, en el campo de la industria, las ecuaciones lineales se utilizan para determinar el número de productos a fin de obtener mayor rentabilidad, o para determinar los tiempos mínimos o máximos en la producción de ciertos artículos.




Shutterstock, (2020). 411734815

▲ Botellas plásticas.

# Taller práctico

DCCD: M.5.2.24. Aplicar la divisibilidad de números enteros, el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros, y la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (con soluciones enteras no negativas) en la solución de problemas.

**1** En cada ítem se define una ecuación lineal con dos incógnitas $x, y \in \mathbb{R}$. A una escala apropiada, **representa** gráficamente esta recta. **Determina** las soluciones enteras y **realiza** la verificación correspondiente.

a) $2x - 3y = 35$.

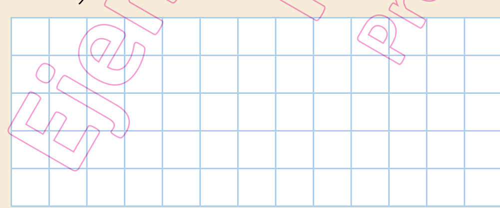


b) $-x + 9y = 85$.

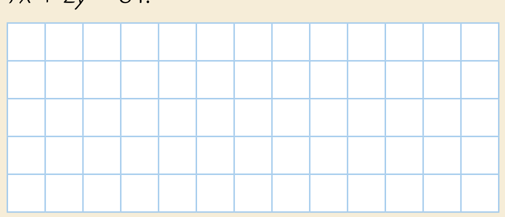


**2** En cada ítem se define una ecuación lineal con dos incógnitas $x, y \in \mathbb{R}$. **Representa** gráficamente esta recta. **Determina** las soluciones enteras no negativas, y **realiza** la verificación correspondiente.

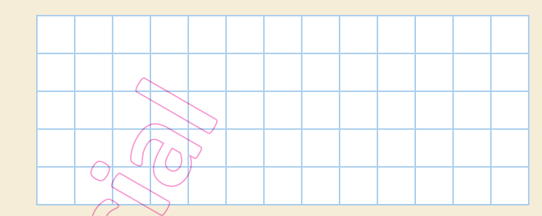
a) $3x + 2y = 25$.



b) $7x + 2y = 81$.

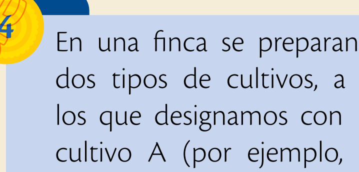


c) $2x + 7y = 40$.

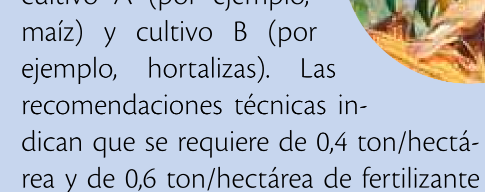


**3** **Resuelve** los siguientes problemas.

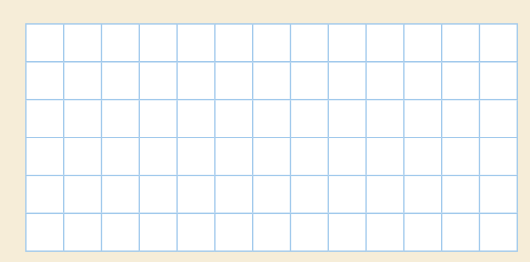
En un almacén se oferta la venta de ropa. Por tres camisetas y cinco pares de medias, se paga $ 64. Tomando en consideración que el costo de una camiseta es mayor al de dos pares de medias, **halla** el costo de cada camiseta y de cada par de medias.



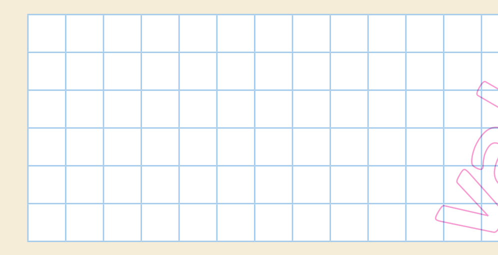
**4** En una finca se preparan dos tipos de cultivos, a los que designamos con cultivo A (por ejemplo, maíz) y cultivo B (por ejemplo, hortalizas). Las recomendaciones técnicas indican que se requiere de 0,4 ton/hectárea y de 0,6 ton/hectárea de fertilizante para cada tipo de cultivo, y que se deben cultivar al menos 9 hectáreas de A y al menos 3 de B. Si se dispone de 9 ton de fertilizante, **halla** cuántas hectáreas de cultivo de *A* y de *B* pueden realizarse.



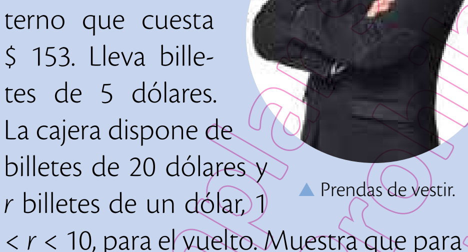
Shutterstock, (2020). 224129827



**5** Una empresa de transporte urbano dispone de dos tipos de unidades: $A$ y $B$. El tipo de unidades $A$ tiene una capacidad para 40 personas, y el tipo de unidades $B$, para 50 personas. Las unidades están distribuidas en varias rutas o circuitos en la ciudad. En las horas pico operan todas sus unidades y transportan a un promedio de 2 500 personas cada 30 minutos. Además, operan al menos 18 unidades de $A$ y al menos 20 unidades de $B$. **Encuentra** el número de unidades de cada tipo que operan en los 30 minutos de una hora pico. ¿Cuántas soluciones obtienes?

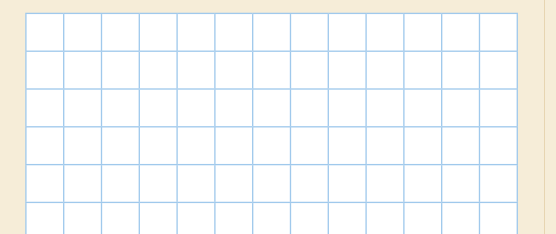


**6** Juan compra un terno que cuesta \$ 153. Lleva billetes de 5 dólares. La cajera dispone de billetes de 20 dólares y $r$ billetes de un dólar, $1 < r < 10$, para el vuelto. Muestra que para $r = 2$ o $r = 7$, pueden llegar a un acuerdo satisfactorio con el pago de billetes de 5 dólares y el vuelto. Esto es, **halla** analíticamente el número de billetes de 5 dólares y de 20 dólares que se requieren. **Muestra** que para $r \neq 2$ o $r \neq 7$ no llegan a ningún acuerdo.



▲ Prendas de vestir.

Shutterstock, (2020). 390653230



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Al trabajar con estudiantes con discapacidad visual es necesario tener conciencia que el ritmo, tanto en la elaboración como en la interpretación de las representaciones, siempre será más lento, por lo que necesita más tiempo.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** En cada ítem se define un conjunto no vacío $S$. **Determinen** las soluciones enteras no negativas, y **realicen** la verificación correspondiente.

a) $S = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2) \mid 3 \leq m \leq 10, n \geq 2$, y, $3m + 2n = 36\}$.

b) $S = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2) \mid 1 \leq m \leq 15, n \leq 20$, y, $7m + 5n = 140\}$.

c) $S = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2) \mid 0 < m, 1 \leq n \leq 10$, y, $2m - 7n = 112\}$.

d) $S = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2) \mid 5 \leq m \leq 24, n \leq -2$, y, $-5m + 6n = -120\}$.

**8** La Industria del Plástico S. A. (nombre ficticio) fabrica tubos de plástico de 6 metros de longitud y tinas con capacidad de 20 litros. Los tiempos requeridos para fabricar un tubo son de 1/6 hora, y para una tina, 1/10 hora. Para la empresa es rentable fabricar al menos 100 tubos por día y al menos 60 tinas por día. **Denoten** con $m$ el número de tubos y con $n$ el número de tinas que se fabrican por día. **Determinen** todos los pares $m, n \in \mathbb{Z}^+$ que satisfacen los requerimientos. **Interpreten** los resultados gráficamente.



▲ Tubos de PVC.

Shutterstock, (2020). 452339737

DCCD: M.5.2.25. Reconocer un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^2$ y determinar el conjunto de soluciones factibles, de forma gráfica y analítica, para resolver problemas de programación lineal simple (minimización en un conjunto de soluciones factibles de un funcional lineal definido en $\mathbb{R}^2$).



**Saberes previos**

¿Cómo identificas un punto del plano cartesiano?



**Desequilibrio cognitivo**

En un problema de programación lineal, ¿las variables que intervienen pueden ser negativas? Explica.



**Recuerda que...**

- Consideramos el sistema de coordenadas cartesianas y lo denotamos con

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

e identificamos cada punto del plano con un par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- El conjunto de soluciones factibles siempre se determina en el primer cuadrante.

# Problema de la programación lineal. Conjunto de soluciones factibles

Las variables que intervienen en los problemas de programación lineal son no negativas. Escribimos $x \geq 0$, $y \geq 0$, para cada una de estas variables, y las asociamos a un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Así,

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\};\ S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\};$$

Representación gráfica:

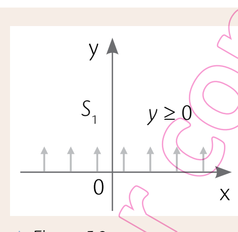



Figura 5.2.

$S_1$ representa un semiplano que se extiende del eje $x$ hacia arriba, según la dirección del eje $y$.

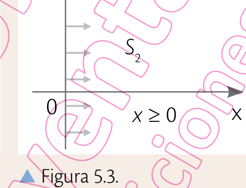



Figura 5.3.

$S_2$ representa un semiplano que se extiende del eje $y$ hacia la derecha, según la parte positiva del eje $x$.

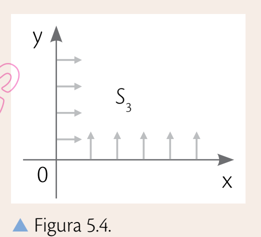



Figura 5.4.

El conjunto $S_3 = S_1 \cap S_2$ es $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, y representa la intersección de los dos semiplanos.

*Ejercicios resueltos*

1. Considerar las desigualdades $\begin{cases} 2x + 5y \geq 6, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, & (a) \\ x \geq 0, & & (b) \\ y \geq 0, & & (c) \end{cases}$

Determinemos gráficamente el conjunto de soluciones factibles. Las condiciones $x \geq 0$, $y \geq 0$ muestran que las soluciones factibles son no negativas. Comenzamos con la ecuación $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $2x + 5y = 6$.

Hemos visto que el conjunto $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 5y = 6\}$ representa una recta de pendiente $m = -\frac{2}{5}$ y corta a los ejes en los puntos $A = (3, 0)$ y $B = \left(0, \frac{6}{5}\right)$.

El conjunto

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 5y \leq 6\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{6 - 2x}{5}\right\}$$

representa un semiplano que se extiende de la recta $L$ hacia abajo. En la Figura 5.5. se muestra este conjunto de puntos que satisfacen las desigualdades $(a)$, $(b)$ y $(c)$ y al que denotamos con $S$. Nota que $S$ está determinado por la región triangular de vértice 0, $A$ y $B$.

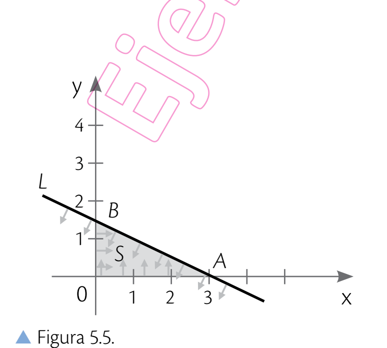



Figura 5.5.

2. Considerar el conjunto de restricciones: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 3y \leq 9, \\ x - y \leq 3. \end{cases}$

Determinemos gráficamente el conjunto $S$.

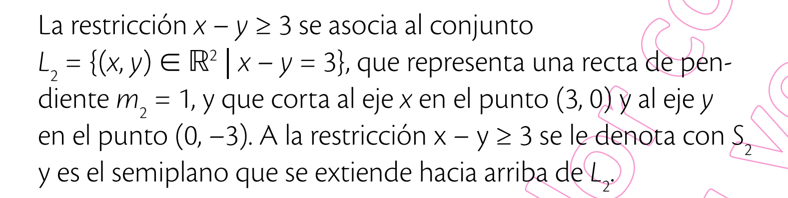
Asociada con la restricción $x + 3y \leq 9$, tenemos el conjunto

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 9\},$$

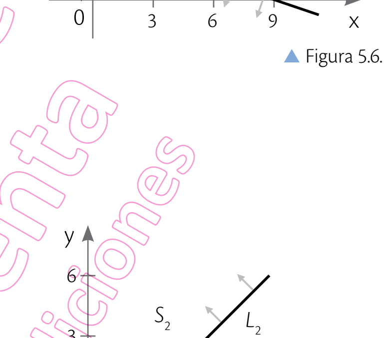
que representa una recta de pendiente $m_1 = -\dfrac{1}{3}$ y que corta al eje $x$ en el punto $(9, 0)$ y al eje $y$ en el punto $(0, 3)$.

▲ Figura 5.6.

La restricción $x + 3y \leq 9$ representa el semiplano $S_1$ que se extiende bajo la recta $L_1$.



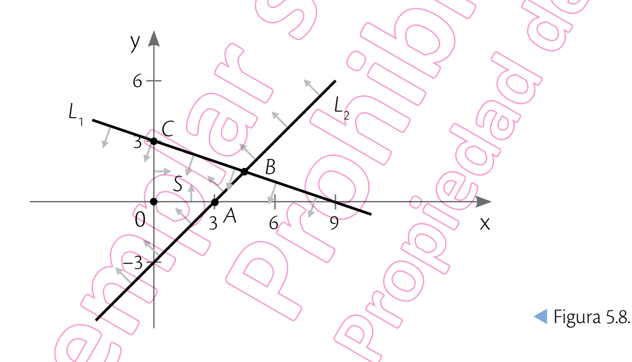
La restricción $x - y \geq 3$ se asocia al conjunto $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 3\}$, que representa una recta de pendiente $m_2 = 1$, y que corta al eje $x$ en el punto $(3, 0)$ y al eje $y$ en el punto $(0, -3)$. A la restricción $x - y \geq 3$ se le denota con $S_2$ y es el semiplano que se extiende hacia arriba de $L_2$.



▲ Figura 5.7.

En la Figura 5.6. se muestra la recta $L_1$ y el semiplano $S_1$, mientras que en la Figura 5.7. se muestra a la recta $L_2$ y el semiplano $S_2$.

Tomando en cuenta la no negatividad de las soluciones factibles y la intersección de los dos semiplanos $S_1$ y $S_2$, se obtiene la región factible que se muestra en la Figura 5.8.




◀ Figura 5.8.

Determinamos el punto $B$ intersección de las rectas $L_1$ y $L_2$, esto es, $\{B\} = L_1 \cap L_2$.

Hallamos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\begin{cases} x + 3y = 9, \\ x - y = 3, \end{cases}$

cuya solución es $x = \dfrac{9}{2}, y = \dfrac{3}{2}$.

El conjunto $S$ de soluciones factibles es la región poligonal de vértices

$$O = (0, 0), A = (3, 0), B = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right), C = (0, 3).$$

## @ Conexiones con las TIC

Existen programas computacionales que te permiten graficar inecuaciones de primer grado y obtener la región factible. Si quieres ampliar este tema, puedes **visitar** el siguiente enlace:

***bit.ly/2ISvMOe***



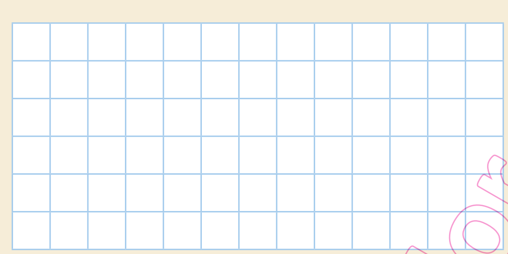
# Taller práctico

DCCD: M.5.2.25. Reconocer un subconjunto convexo en $\mathbb{R}^2$ y determinar el conjunto de soluciones factibles, de forma gráfica y analítica, para resolver problemas de programación lineal simple (minimización en un conjunto de soluciones factibles de un funcional lineal definido en $\mathbb{R}^2$).

**1** Sean $A = (2, 1)$, $B = (4; 1{,}5)$, $C = (3, 4)$ los vértices de una región poligonal $P$.

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** gráficamente dicha región.

b) **Determina** las ecuaciones cartesianas de cada uno de los lados.

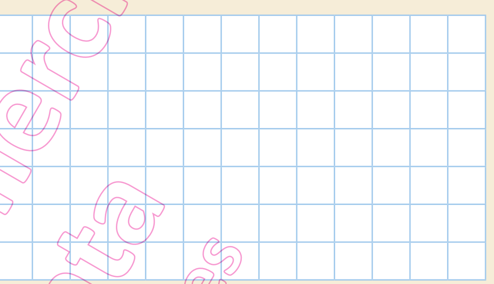


**2** **Considera** los vértices $A = (3, 0)$, $B = (5, 4)$, $C = (0, 2)$ de una región $S$. **Representa** en el plano $xy$ dicha región, y **escribe** el conjunto de restricciones que la definen.

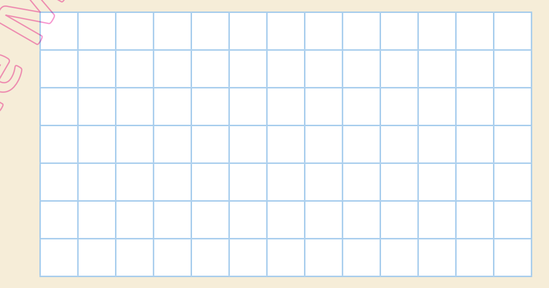
**3** Sean $O = (0, 0)$, $A = (4, 0)$, $B = (4, 4)$, $C = (0, 2)$ los vértices de una región $S$. **Grafica** dicha región y **determina** las restricciones que definen a $S$.



**4** Dados los vértices $u_1 = (3, 2)$, $u_2 = (6, 4)$, $u_3 = (5, 6)$, $u_4 = (1, 4)$ de una región poligonal $S$, **obtén** el conjunto de restricciones que definen a $S$ y **representa** gráficamente.

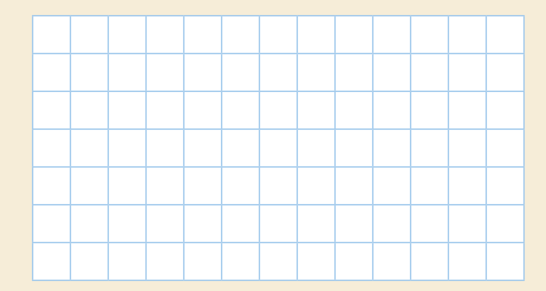


**5** Los vértices de una región poligonal $S$ son $A = (2, 1)$, $B = (4; 1{,}5)$, $C = (4, 3)$, $D = (1{,}5; 5)$, $E = (1{,}5; 2)$. **Representa** estos puntos en el sistema de coordenadas rectangulares e **identifica** la región $S$. **Obtén** el conjunto de restricciones que definen a $S$.

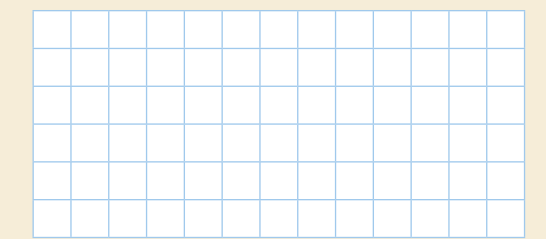


**6** En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** el conjunto $S$ que en cada ítem se define. **Determina** los vértices de $S$.

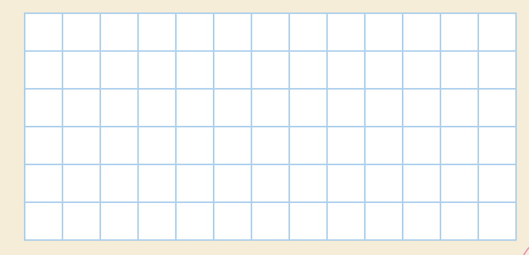
a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.



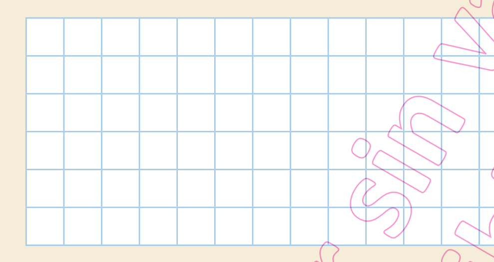
b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 8x + 5y \leq 20\}$.



c) $S = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3, \\ 3x + 4y \leq 24 \end{array} \right\}$.

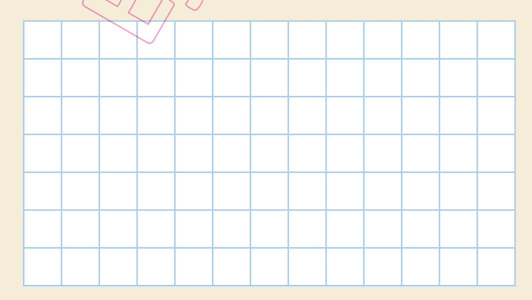


d) $S = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq 8, \\ 2x + 3y \leq 18 \end{array} \right\}$.



**7** En cada ítem se da un conjunto de restricciones. En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** dicha región y **obtén** sus vértices.

a) $\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \\ x + 5y \leq 20, \\ x + 2y \leq 10. \end{cases}$



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Cuando un compañero tiene una discapacida motriz debemos prestar atención a los lugares por donde debe desplazarse para que no se choque con sus compañeros.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**8** **Consideren** las tres restricciones siguientes:

$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 5y \geq 8\}$,

$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 5\}$,

$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 0{,}5y \geq 3\}$.

En el sistema de coordenadas rectangulares $xy$, **representen** cada restricción y **obtengan** $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$, así como sus vértices.

**9** En cada ítem se da un conjunto de restricciones. En el sistema de coordenadas rectangulares, **representen** dicha región y **obtengan** sus vértices.

a) $\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \\ 10x + 21y \leq 80, \\ 5x - 8y \leq 10. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \\ x + y \geq 2, \\ 4x - y \leq 4, \\ 2x - y \geq -1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \\ x + 5y \geq 8, \\ x + 3y \leq 5, \\ x + 0{,}5y \leq 3. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \\ 4x + 5y \leq 25, \\ 4x - 8y \leq 8, \\ 4x - 2y \geq -4. \end{cases}$



**Saberes previos**

¿Qué entiendes por solución óptima?



**Desequilibrio cognitivo**

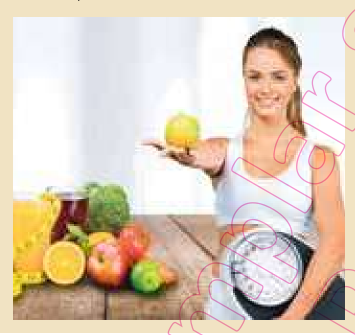
¿Las soluciones factibles de un problema de programación lineal pueden ser negativas?



**Interdisciplinariedad**

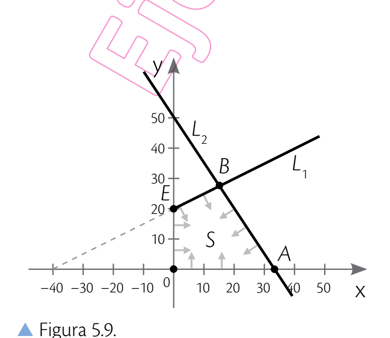
**Matemática y nutrición**

Uno de los problemas más conocidos y difundidos de aplicación de la programación lineal se relaciona con las dietas. En términos generales, el problema consiste en encontrar la dieta que contenga los requerimientos nutricionales al menor costo posible.



Shutterstock, (2020). 537604240

▲ Dieta.




▲ Figura 5.9.

# Puntos extremos y solución óptima

## Procedimiento de solución gráfica

*Ejercicios resueltos*

1. La función objetivo $U$ está definida como $U = 3x + 2y$, sujeta a la restricción $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1 \quad x \in [1, 3]\}$. Determinar $\min_{(x,y)\in S} U$ y $\max_{(x,y)\in S} U$.

De la definición del conjunto S tenemos la equivalencia

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow y = x + 1; \quad x \in [1, 3].$$

Al reemplazar $y$ en la función objetivo $U$, obtenemos

$$U = 3x + 2y = 3x + 2(x + 1) = 5x + 2; \quad x \in [1, 3].$$

Puesto que $x \in [1, 3]$, entonces,

$$1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 5 \leq 5x \leq 15 \Leftrightarrow 7 \leq 5x + 2 \leq 17 \Leftrightarrow 7 \leq U \leq 17.$$

En $x = 1$ se tiene $y = 2$ y $U_0 = 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7 \leq U$.

Luego, $\min_{(x,y)\in S} U = 7$, valor que alcanza en el punto (1, 2).

En forma similar, para $x = 3$, se tiene $y = 4$ y $U_1 = 3 \times 3 + 2 \times 4 = 17 \geq U$. Luego, $\max_{(x,y)\in S} U = 17$, valor que alcanza en el punto (3, 4).

2. Sea la función objetivo $C = 200x + 70y$, sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} x \geq 0 & (a) \\ y \geq 0 & (b) \\ -0{,}5x + y \leq 20 & (c) \\ 1{,}5x + y \leq 50 & (d) \end{cases}$$

Hallar $\hat{x}, \hat{y}$ soluciones factibles, tales que $\hat{C} = \max_{(x,y)\in S} C = 200\hat{x} + 70\hat{y}$.

i) **Determinación gráfica del conjunto de soluciones factibles**

Comenzamos con las condiciones $(a)$ y $(b)$ que nos muestran que las soluciones factibles tienen que ser no negativas.

Analizamos la condición $(c)$. Este conjunto representa una recta que tiene una pendiente $m_1 = 0{,}5$. Corta a los ejes del lado positivo, en el punto (0, 20), y satisface todos los puntos del semiplano que parten de la recta $L_1$ hacia abajo.

Analizamos la condición $(d)$. Este conjunto es una recta que tiene una pendiente $m_2 = -1{,}5$. Sus puntos de corte con los ejes del lado positivo son $\left(\frac{100}{3}, 0\right)$ y (0, 50). La desigualdad muestra que son todos los puntos del semiplano que parten de $L_2$ hacia abajo.

En la Figura 5.9. se muestra el conjunto de soluciones factibles. Observamos que es una región poligonal cuyos vértices son los puntos 0, $A$, $B$, $E$.

ii) **Vértices de la región factible**

Los vértices 0, $A$, $E$ están determinados así: $0 = (0, 0)$, $A = \left(\frac{100}{3}, 0\right)$, $E = (0, 20)$. Nos queda determinar el vértice $B$. Se tiene $L_1 \cap L_2 = \{B\}$, es decir que es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -0{,}5x + y \leq 20, \\ 1{,}5x + y \leq 50, \end{cases}$$ cuya solución es $y = 27{,}5$ y $x = 15$. Así, $B = (15; 27{,}5)$.

iii) **Determinación del valor extremo**

Calculemos $C = 200x + 70y$ en los vértices de $S$.

| | |
|---|---|
| Punto $O = (0, 0)$, | $C = 200 \times 0 + 70 \times 0 = 0.$ |
| Punto $A = ((100)/3), 0)$, | $C = 200 \times ((100)/3) + 70\times0 = 20\,000/3.$ |
| Punto $B = (15; 27{,}5)$, | $C = 200 \times 15 + 70 \times 27{,}5 = 4\,925.$ |
| Punto $E = (0, 20)$, | $C = 200 \times 0 + 70 \times 20 = 1\,400.$ |

Tenemos $\hat{C} = 200\hat{x} + 70\hat{y} = \frac{20\,000}{3}$ en $\hat{x} = \frac{100}{3}$, $\hat{y} = 0$, es decir, $\hat{C} = \underset{(x,y)\in S}{\text{máx}}\, C = \frac{20\,000}{3}$, valor que alcanza en el vértice $A$.

Puesto que $x \geq 0$, $y \geq 0$, entonces $C = 200x + 70y \geq 0$. Sea $C > 0$.

Definimos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 200x + 70y = C\}$.

La pendiente de la recta $D$ es $m_D = -\frac{20}{7}$. Sea $(x_0, y_0) \in S$.

La ecuación cartesiana de la recta $L$ que pasa por $(x_0, y_0)$ y tiene pendiente $m_D = -\frac{20}{7}$ está definida como $y - y_0 = -\frac{20}{7}(x - x_0)$ y de esta obtenemos $20x + 7y = 20x_0 + 7y_0$, y multiplicando por 10 para obtener la función objetivo, resulta

$$200x + 70y = 200x_0 + 70y_0.$$

Ponemos $C_0 = 200x_0 + 70y_0 \geq 0$. Así, para $(x, y) \in S$ se tiene

$$200x + 70y = C_0.$$

Para cada punto $(x_0, y_0) \in S$ obtenemos una recta de ecuación cartesiana

$$200x + 70y = 200x_0 + 70y_0 = C_0 \geq 0.$$

Particularmente para $(x, y) \in S$ que yacen en la recta, se tiene

$$200x + 70y = C_0 \geq 0.$$

En la Figura 5.10. se han trazado rectas paralelas que pasan por cada uno de los vértices. Nota que el valor máximo se obtiene en el vértice $A$, el más alejado de todos.

**Simbología matemática**

- $\underset{(x,y)\in S}{\text{máx}}\, U$: valor máximo de la función objetivo
- $\underset{(x,y)\in S}{\text{mín}}\, U$: valor mínimo de la función objetivo
- $L_1$: recta
- $m$: pendiente de la recta
- $\in$: pertenece al conjunto

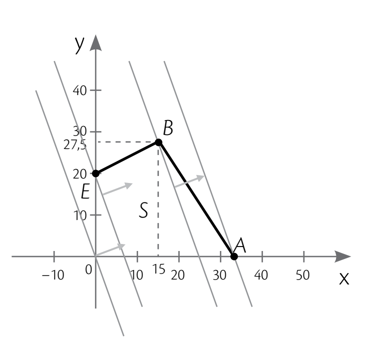


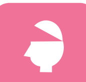

Figura 5.10.

DCCD: M.5.2.27. Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.



**Saberes previos**

¿Qué es un modelo matemático?



**Desequilibrio cognitivo**

En la práctica, ¿para qué te sirve maximizar o minimizar recursos?

**Recuerda que...**

Para la solución de un problema de programación lineal, es necesaria la construcción del modelo matemático que implica dos elementos básicos: las restricciones y la función objetivo.

# Modelización de problemas de programación lineal

## Modelo simple de línea de producción

Una planta industrial de plástico produce dos tipos de accesorios para refrigeradoras: tipo 1 y tipo 2. Para su producción, el tipo 1 requiere 3 horas/máquina por cada 100 unidades. Mientras que para su producción, el tipo 2 requiere 1 hora/máquina por cada 100 unidades. La planta dispone al mes de 120 horas/máquina.

El próximo mes se deben producir 3 500 refrigeradoras que utilizan el accesorio tipo 1 y 4 500 refrigeradoras que utilizan el accesorio tipo 2. La utilidad neta en la producción de una unidad del tipo 1 es $ 3,5 y del tipo 2 es $ 2,5. Determina la cantidad de unidades del tipo 1 y del tipo 2 que deben producirse mensualmente para maximizar la utilidad.

a) **Restricciones**

Designamos con $a$ al número de unidades del tipo 1, y con $b$ al número de unidades del tipo 2, producidas mensualmente.

Producción de una unidad de $a$: 0,03 *h/máquina*.
Producción de una unidad de $b$: 0,01 *h/máquina*.

Balance de horas/máquina: $0{,}03a + 0{,}01b \leq 120$.
Restricción de la producción de $a$: $0 \leq a \leq 3\,500$.
Restricción de la producción de $b$: $0 \leq b \leq 4\,500$.

b) **Función objetivo**

Denotamos con $U$ la utilidad neta que debemos maximizar con la producción de $a$ y $b$. La utilidad neta de cada unidad de $a$ es $ 3,5, y la utilidad de cada unidad de $b$ es $ 2,5. Por lo tanto, la función objetivo está definida como $U = 3{,}5a + 2{,}5b$.

De a) y b) obtenemos el siguiente modelo matemático:
$máx\{3{,}5a + 2{,}5b\}$,

$$\text{sujeto a} \quad \begin{cases} 0 \leq a \leq 3\,500, & (a) \\ 0 \leq b \leq 4\,500, & (b) \\ 0{,}03a + 0{,}01b \leq 120. & (c) \end{cases}$$

La restricción $(c)$ es equivalente a $3a + b \leq 12\,000$.

c) **Determinación de la región de soluciones factibles y vértices**

Graficamos la región de soluciones factibles que se muestra en la Figura 5.11. La región $S$ de soluciones factibles es la región poligonal de vértices $O$, $A$, $B$, $C$ y $D$. Los vértices $O$, $A$, $D$ están determinados. Nos queda, entonces, obtener los vértices $B$ y $C$. $C$ es $C = (2\,500, 4\,500)$, y $B$ es $B = (3\,500, 1\,500)$. Tomando en consideración las restricciones y estos últimos resultados, obtenemos la región de soluciones factibles, que se muestra en la Figura 5.12.

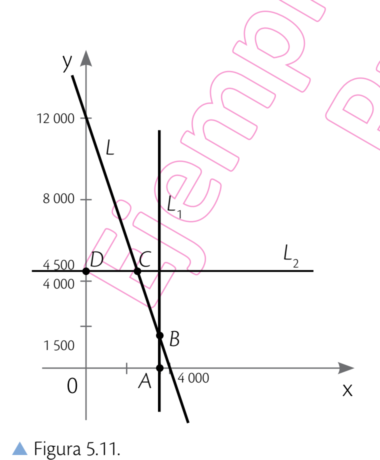



Figura 5.11.

Calculemos $U = 3{,}5a + 2{,}5b$ en los vértices de $S$.
Vemos que el valor extremo es alcanzado en el vértice $C = (2\,500, 4\,500)$.

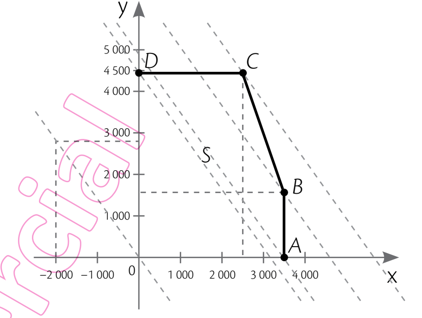


Figura 5.12.

Así, $\acute{U} = 3{,}5 \times 2\,500 + 2{,}5 \times 4\,500 = 20\,000$.
De este resultado se concluye que deben producirse 2 500 unidades del tipo 1 y 4 500 unidades del tipo 2 para obtener un beneficio máximo de \$ 20 000.

## Modelo en la industria química

**Posición del problema**

Una industria alimenticia modifica la producción de dos artículos *A* y *B* que requieren de tres procesos dominantes: mezclado, evaporado, pasteurizado-envasado. En la tabla se muestran los tiempos que necesitan 500 unidades de cada producto y cada proceso.

| *Proceso* | $A(h)$ | $B(h)$ | Disponibilidad $(h)$ |
|---|---|---|---|
| *Mezclado* | 4 | 3 | 80 |
| *Evaporado* | 5 | 6 | 120 |
| *Pasteurizado-envasado* | 8 | 12,5 | 240 |

La utilidad neta de *A* es \$ 8,5 y la de *B* es \$ 12 por cada 500 unidades. ¿Cuál es la estrategia que se debe seguir para que la utilidad sea máxima?

**Solución**

Designamos con $x \geq 0$ al número de 500 unidades de *A*, y con $y \geq 0$ al número de 500 unidades de *B*.

a) Restricciones
Restricción del tiempo de mezclado: $4x + 3y \leq 80$.
Restricción del tiempo de evaporación: $5x + 6y \leq 120$.
Restricción del tiempo de pasteurizado-envasado: $8x + 12{,}5y \leq 240$.

b) Función objetivo
La utilidad neta de *A* es $8{,}5x$ y la de *B* es $12y$. La función objetivo $U$ está definida como: $U = 8{,}5x + 12y$,
$\text{máx}U = 8{,}5x + 12y$.
De a) y b) se obtiene el modelo matemático

$$\text{sujeto a} \begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0, \\ 4x + 3y \leq 80, \\ 5x + 6y \leq 120, \\ 8x + 12{,}5y \leq 240. \end{cases}$$

c) Conjunto de soluciones factibles
El conjunto de restricciones se encuentra representado en la Figura 5.13.

d) Cálculo del valor óptimo
La función objetivo está definida como $U = 8{,}5x + 12y$ cuyo valor máximo es alcanzado en $C$.
$C = (4{,}138; 16{,}55)$, $U = 8{,}5 \times 4{,}138 + 12 \times 16{,}55 \approx 233{,}773$.

De estos resultados se concluye que el jefe de planta debe producir aproximadamente 4 números de cada 500 unidades de *A*, y 16 números de cada 500 unidades de *B* para una utilidad máxima aproximada de \$ 234,00.

**Glosario**

factible. Que se puede hacer.

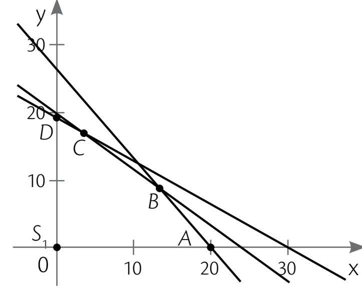
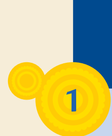


Figura 5.13.

Los vértices de la región de soluciones factibles son:

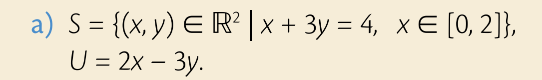
$O = (0, 0)$, $A = (20, 0)$,
$B = \left(\frac{40}{3}, \frac{80}{9}\right)$,
$C = (4{,}138; 16{,}55)$,
$D = (0; 19{,}2)$.

# Taller práctico

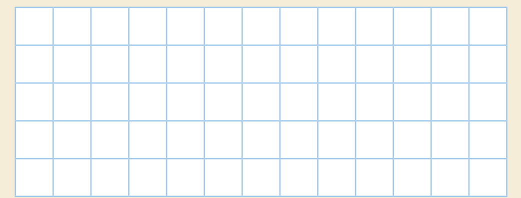


DCCD: M.5.2.26. Realizar un proceso de solución gráfica y analítica del problema de programación lineal, graficando las inecuaciones lineales, determinando los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles, y encontrar la solución óptima.

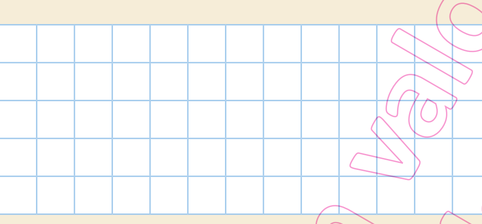
**1** Dados en cada ítem la restricción $S$ y la función objetivo $U$, **calcula** $\min\limits_{(x,y)\in S} U$ y $\max\limits_{(x,y)\in S} U$.



a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 4, \quad x \in [0, 2]\}$,
$U = 2x - 3y$.



b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 8, \quad x \in [8, 20]\}$,
$U = -2x + 4y$.





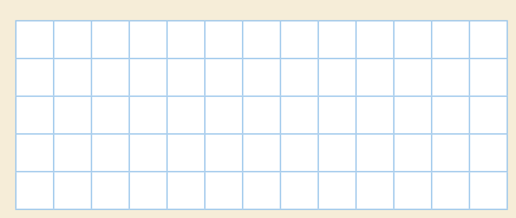
**2** **Considera** el problema de programación lineal $\min\{z = -2x + y\}$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x - y \geq -3, \\ x + y \leq 5, \\ x \geq 0, \ y \geq 0. \end{cases}$$

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** gráficamente el conjunto de restricciones.

b) **Identifica** la región de soluciones factibles y **verifica** que los vértices son (1, 4), (0, 3), (5, 0), (0, 0).

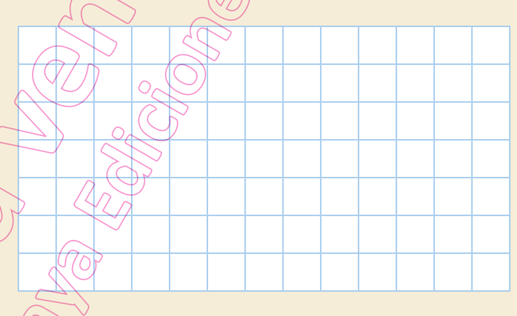
c) **Muestra** que $\min z = -10$, y **determina** en qué punto lo alcanza.



**3** En cada ítem se define un problema de programación lineal. **Representa** gráficamente el conjunto de restricciones. **Determina** el conjunto de soluciones factibles y los vértices. Si el problema tiene solución, **determina** el o los puntos óptimos.

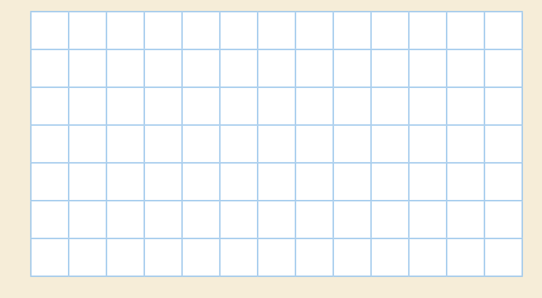
a) $\max\{5x + 8y\}$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} 2x + 3y \leq 60, \\ x + \dfrac{1}{3}y \leq 12, \\ x \geq 0, \ y \geq 0. \end{cases}$$



b) $\min\{5x - y\}$

$$\text{sujeto a } \begin{cases} x - 3y \leq 9, \\ x + y \leq 5, \\ -2x + y \leq 4, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \ y \geq 0. \end{cases}$$



M.5.2.27. Resolver y plantear aplicaciones (un modelo simple de línea de producción, un modelo en la industria química, un problema de transporte simplificado), interpretando y juzgando la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.



**4** **Resuelve** el problema de programación lineal en tu cuaderno.

La empresa Bloques y Adoquines debe producir bloques estructurados y adoquines

con una mezcla de cemento, arena y ripio, en las proporciones que se muestran en la tabla:

| | Bloque estructurado | Adoquín |
|---|---|---|
| *Cemento* | 1 | 1,25 |
| *Arena* | 1,75 | 2 |
| *Ripio* | 3 | 3 |

Esta semana se dispone de 2 ton de cemento, 3,5 ton de arena y 6,3 ton de ripio. La utilidad neta por bloque estructurado es \$ 0,25 y por adoquín, \$ 0,35. ¿Qué cantidad de bloques y adoquines deben producirse para que el ingreso sea el mayor posible?

a) **Elabora** el modelo matemático.

b) **Obtén** gráficamente la región de soluciones factibles y sus vértices.

c) **Calcula** la función objetivo en sus vértices. **Concluye**.

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Si en el equipo existe un miembro con alguna discapacidad intelectual se debe trabajar actividades desde su vivencia para que las pueda comprende.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**5** La Industria del Plástico S. A. fabrica tubos de plástico de 6 m de longitud y contenedores de agua o tinas de 0,02 m$^3$ (o su equivalente, 20 litros). El polietileno es el material principal utilizado en la fabricación de estos dos productos. Se requieren 0,665 de polietileno para fabricar 6 m de longitud de tubo, y 0,3 kg para fabricar una tina. Diariamente se consumen 0,5 toneladas de polietileno. Para la fabricación de estos dos productos, se dispone de una máquina que trabaja ininterrumpidamente 24 horas al día, dedicando $\frac{1}{10}$ hora/tina y $\frac{1}{6}$ hora/tubo. La utilidad es \$ 18 por cada tubo y \$ 1,5 por cada tina.

a) **Elaboren** el modelo matemático.

b) **Representen** gráficamente el conjunto de restricciones, **identifiquen** la región de soluciones factibles, y **determinen** los vértices de dicho conjunto.

c) **Calculen** el valor óptimo y **analicen** el resultado.

**6** Una pequeña industria del mueble tiene dos plantas, y produce tres clases de muebles: súper premium, premium y normal. El número de muebles que cada planta produce y el costo total de producción semanal se resume en la siguiente tabla

| | Planta I | Planta II |
|---|---|---|
| *Normal* | 30 | 15 |
| *Premium* | 20 | 25 |
| *Súper premium* | 15 | 25 |
| *Costo* | \$ 120 000 | \$ 160 000 |

La empresa inmobiliaria requiere equipar casas que son de tres tipos: 90 m$^2$, 110 m$^2$ y 140 m$^2$. Se requieren al menos 90 conjuntos de muebles normales, 120 de premium y 100 de súper premium.

A la empresa le interesa establecer la estrategia de producción para que su costo sea mínimo.

a) **Elaboren** el modelo matemático.

b) **Grafiquen** el conjunto de restricciones y los vértices de la región de soluciones factibles.

c) **Calculen** la función objetivo en cada vértice y **determinen** el mínimo.

d) **Analicen** el siguiente modelo

$$mín\ C = 120\,000x + 160\,000y$$

$$\text{sujeto} \begin{cases} 30x + 15y \geq 90, \\ 20x + 25y \geq 120, \\ 15x + 25y \geq 100, \\ x \geq 0,\ \ y \geq 0, \end{cases}$$

y **compárenlo** con sus resultados.

DCCD: M.5.3.24. Utilizar el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales, con apoyo de las TIC.
M.5.3.25. Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en el método de mínimos cuadrados al determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales dentro del contexto del problema, con el apoyo de las TIC.



**Saberes previos**

¿Qué significa para ti la palabra correlación?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué aspectos personales se encuentran correlacionados en tu diario vivir?



**Interdisciplinariedad**

**Matemática y agricultura**

En el ámbito de la agricultura, se puede estudiar la relación de la cantidad de fertilizante que debe aplicarse a un suelo para un tipo de cultivo, con la producción del cultivo.
Por ejemplo, en el cultivo de arroz, interesan la cantidad de fertilizante (urea) aplicado, y la cantidad de arroz. Esta clase de estudios se realizan en otros tipos de cultivos, como aquellos de cacao aromático, mango, banano, etc. En este contexto, interesan también la cantidad de suelos (área cultivable) y las mejoras de estos (por ejemplo, con maquinaria introducida), frente a la cantidad y la calidad de la producción agrícola.



Shutterstock, (2020). 512140084

▲ Agricultor.

# Regresión y correlación

Muchas situaciones en nuestro entorno, sean de tipo social, económico, industrial, de educación, en el sector de la salud, en el ámbito de las ingenieras, entre otros, ponen de manifiesto el estudio de la relación entre dos o más variables de interés.

*Ejemplos*

1. La evolución de los precios de mercado de computadoras (*laptops*, *tablets*, calculadoras científicas, etc.). Los fabricantes de estos productos se interesan en saber cómo producir más y cómo bajar los precios en el mercado.
2. En el amplio sector de la medicina, un equipo de médicos de un hospital está interesado en desarrollar un experimento para estudiar, en pacientes que sufren de una enfermedad particular (por ejemplo, en pacientes psiquiátricos o en pacientes con diabetes), la relación entre el tiempo de reacción a un estímulo y la dosis de un medicamento.
3. En el ámbito industrial, interesa estudiar el problema de la introducción de tecnologías y maquinaria frente a la generación de empleo, la calidad y la producción que se podrá alcanzar.
4. En educación, el interés radica en el estudio de la inversión realizada en recursos humanos, infraestructura, laboratorios, bibliotecas, etc., frente al número de bachilleres graduados y calidad de la educación, número de graduados de universidades, número de graduados en programas de maestrías y doctorados, en diversas áreas del conocimiento, y generación de empleo, entre tantos otros problemas del sector.

Los estudios de esta clase de problemas se pueden analizar e investigar mediante dos tipos de modelos matemáticos:

1. Análisis de regresión.
2. Análisis de correlación.

El análisis de regresión centra la atención en la naturaleza de relaciones entre variables, por ejemplo, cualitativas y cuantitativas, discretas y continuas. El análisis de correlación focaliza la atención en la intensidad, fuerza o resistencia de estas relaciones (fuertemente relacionadas, débilmente relacionadas).

Con frecuencia, se dispone de un conjunto de datos

$$S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\},$$

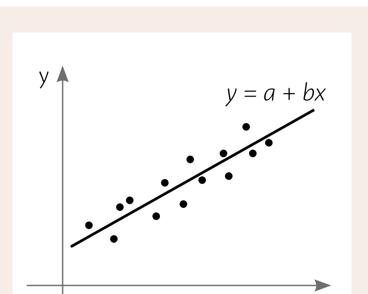
en el que el dato $x_i$ denota una observación o medida de la variable independiente $x$, el dato $y_i$ es la observación o medida de la variable dependiente $y$, y el par ordenado $(x_i, y_i)$ se denomina dato.

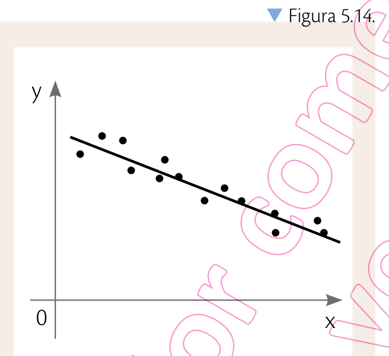
## Análisis de la relación entre dos variables

El análisis de la relación entre estas dos variables comienza con la construcción de un gráfico llamado diagrama de dispersión: los pares ordenados $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$; $i = 1, \ldots, n$ son representados en el sistema de coordenadas rectangulares. En el eje $x$ se representan los datos $x_i$, mientras que en el eje $y$ se representan los datos $y_i$. Así se obtiene cada uno de los puntos $(x_i, y_i)$.

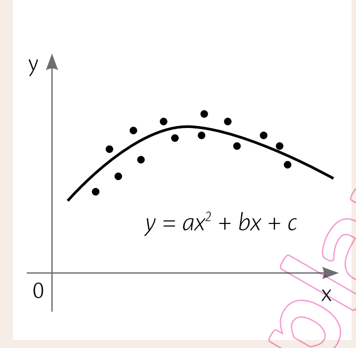
En la Figura 5.14. se muestran diagramas de dispersión de seis conjuntos de datos; cada uno de ellos contiene catorce puntos.

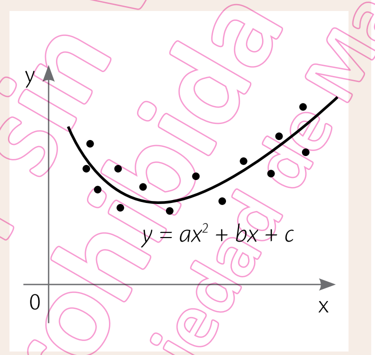
▼ Figura 5.14.



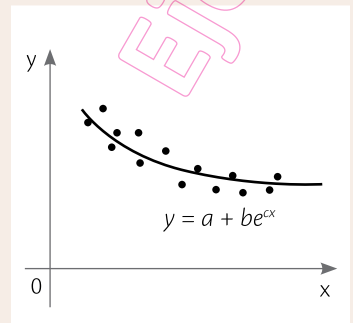



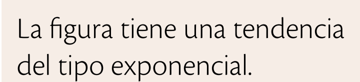

Las figuras muestran una tendencia del tipo lineal, es decir, una función de la forma $y = f(x) = ax + b$, siendo $a$, $b$ constantes reales.

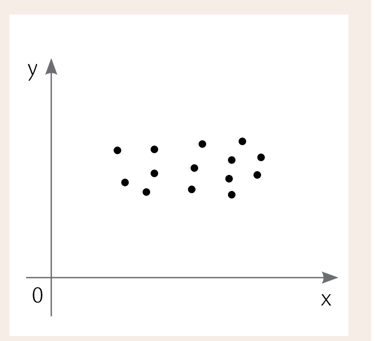



Las figuras muestran una tendencia del tipo cuadrático, es decir, una función de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a$, $b$, $c$ constantes reales.





La figura tiene una tendencia del tipo exponencial.




La figura no muestra tendencia alguna.



**Interdisciplinariedad**

**Matemática e historia**

Los conceptos de regresión y correlación fueron introducidos por el inglés Francis Galton (1822-1911) en el ámbito de la biología.

▲ Francis Galton (1822-1911).

Francis Galton, (2020). www.wikimedia.org

**Recuerda que...**

Cuando el estudio de la relación se limita solo a dos variables, se llama procedimiento analítico de análisis de regresión simple (análisis de correlación simple). Cuando el estudio de la relación involucra tres o más variables, la técnica matemática se conoce como análisis de regresión múltiple (análisis de correlación múltiple).

## Regresión lineal simple. Método de mínimos cuadrados

En el análisis de la regresión lineal simple, a las dos variables involucradas las asignamos con "$x$" y "$y$". A la variable $x$ se le denomina variable independiente, mientras que a la variable $y$ se la llama variable dependiente. El análisis de la regresión se utiliza, por ejemplo, para construir una función dependiente de una o más constantes por determinar, a la que denominamos modelo matemático de predicción, en cuyo caso $x$ se denomina variable de predicción, mientras que $y$ se llama variable de respuesta.

En el análisis de la regresión, la variable $x$ puede considerarse como ordinaria, esto es, no se trata de una variable aleatoria. Por su parte, la variable $y$ es una variable aleatoria, y se supone que la media $\bar{y}$ depende de la variable independiente $y$.

Construimos una función que tiene la forma de un polinomio de grado ≤1 cuya gráfica se identifica con la de una recta. Con mayor precisión, se considera el problema siguiente: halla un polinomio $p$ de grado ≤1 de la forma

$$y = p(x) = a + bx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son calculados con el denominado método de mínimos cuadrados, cuyo algoritmo se describe a continuación.

### Algoritmo

Para calcular las constantes óptimas $\hat{a}, \hat{b}$ mediante el método de mínimos cuadrados, se requiere la siguiente información:

1. El número de puntos $n \geq 2$.
2. El conjunto de datos $S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$.

### Aplicación del método de mínimos cuadrados

1. Calcula las siguientes sumas:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \; S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \; R_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \; R_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2. Verifica $z = nS_2 - S_1^{\,2} \neq 0$.

3. Calcula la constante óptima de regresión lineal $\hat{a}$:

$$\hat{a} = \frac{S_2R_1 - S_1R_2}{nS_2 - S_1^{\,2}}.$$

4. Calcula el coeficiente óptimo de regresión lineal $\hat{b}$:

$$\hat{b} = \frac{nR_2 - S_1R_1}{nS_2 - S_1^{\,2}}.$$

**Recuerda que...**

Una recta en el plano, no paralela al eje $y$ es un conjunto definido como

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a + bx\}$,

donde $b \in \mathbb{R}$ es la pendiente de la recta, y $a \in \mathbb{R}$. Cuando $b > 0$, la recta $R$ tiene una inclinación a la derecha; cuando $b < 0$, la recta $R$ tiene una inclinación a la izquierda. Asociada a este conjunto, existe una función polinomial $p$ de grado ≤1 de la forma

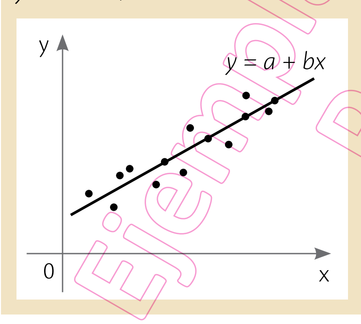
$y = p(x) = a + bx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

de modo que su grafo $G(p) = R$.

Supongamos que se dispone de la siguiente información:

$S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$.

En la Figura 5.15. se ilustra un conjunto de puntos que siguen una tendencia o apariencia de una recta, así como la gráfica de la recta de ecuación cartesiana: $y = a + bx, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.




▲ Figura 5.15.

Resultado: la recta del mejor ajuste, o recta en mínimos cuadrados, es la función definida como

$$y = p(x) = \hat{a} + \hat{b}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Ejercicio resuelto*

Se tiene la función $p$ definida como:

$$y = p(x) = 2{,}1 + 1{,}5x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Utilizando esta función, consideramos el conjunto de datos

$$S = \{(1; 3{,}6), (1{,}5; 4{,}35), (2{,}1; 5{,}25), (2{,}9; 6{,}45), (3{,}2; 6{,}9)\},$$

en los que se ha asignado previamente el valor de $x$, y se ha calculado $y = p(x)$.

Con esta información, buscamos una función $p$ de la forma

$$y = p(x) = a + bx, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

con $a$, $b$ incógnitas que deben ser calculadas mediante el método de mínimos cuadrados. Aplicamos el algoritmo arriba descrito.

Se calculan las sumas $S_1$, $S_2$, $R_1$, $R_2$, anteriormente definidas. Se tiene,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 1{,}5 + 2{,}1 + 2{,}9 + 3{,}2 = 10{,}7,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 + 2{,}25 + 4{,}41 + 8{,}41 + 10{,}24 = 26{,}31,$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i = 3{,}6 + 4{,}35 + 5{,}25 + 6{,}45 + 6{,}9 = 26{,}55,$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 3{,}6 + 6{,}525 + 11{,}025 + 18{,}705 + 22{,}08 = 61{,}935.$$

Se calcula $\quad z = nS_2 - S_1^2 = 5 \times 26{,}31 - (10{,}7)^2 = 17{,}06.$

Se verifica que $z \neq 0$.

La solución está dada como

$$\hat{a} = \frac{S_2R_1 - S_1R_2}{z} = \frac{26{,}55 \times 26{,}31 - 10{,}7 \times 61{,}935}{17{,}06} = 2{,}1.$$

$$\hat{b} = \frac{nR_2 - S_1R_1}{nS_2 - S_1^2} = \frac{5 \times 61{,}935 - 10{,}7 \times 26{,}55}{17{,}06} = 1{,}5.$$

La recta del mejor ajuste está definida como el polinomio de grado 1,

$$p(x) = 2{,}1 + 1{,}5x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

del que ya teníamos conocimiento. De esta manera, verificamos que nuestros cálculos y el método empleado son correctos.

Nota que $p(x)$ es la ecuación cartesiana de la recta a la que se le denomina recta de mejor ajuste en mínimos cuadrados.

### Simbología matemática

$\sum$: símbolo de sumatoria

$\forall$: símbolo que se lee "para todo"

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales

### Conexiones con las TIC

Para ampliar la utilización del método de los mínimos cuadrados, puedes mirar el siguiente video:

***bit.ly/2Lf7Oip***



### Recuerda que...

En el algoritmo, para calcular las constantes de regresión lineal, se utilizó una estrategia de explicación sencilla. Sin embargo, el cálculo de estas constantes puede representarse de esta forma:

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

# Taller práctico

DCCD: M.5.3.24. Utilizar el método de mínimos cuadrados para determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales, con apoyo de las TIC. M.5.3.25. Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en el método de mínimos cuadrados al determinar la recta de regresión en la resolución de problemas hipotéticos o reales dentro del contexto del problema, con el apoyo de las TIC.

**1** **Propón** dos problemas con cada uno de los siguientes enunciados. **Precisa** los estudios que se pueden realizar, en los que se pongan de manifiesto las variables que intervienen, así como la utilidad que puede dársele a los resultados de dichos estudios.

a) En el sector de la energía, **selecciona** dos problemas de interés para la economía regional en tu entorno, parroquia, cantón, provincia.

b) En el ámbito de estudios ambientales, **escribe** dos problemas vinculados con el manejo de desechos sólidos, líquidos, gaseosos.

c) En agricultura, **escribe** los estudios relacionados con cultivos de productos de ciclo corto (un año) y de mayores a un año, inversiones, generación de empleo, productividad, etc., que pueden realizarse.

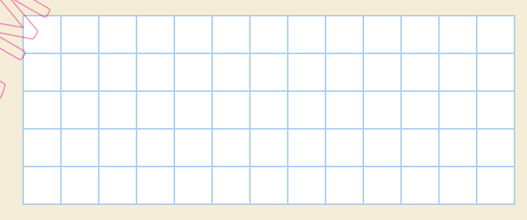
d) En el ámbito de la seguridad social, **analiza** problemas que surgen en materia de servicios de salud y cobertura frente a distintos tipos de poblaciones y por género: niños, niñas, adolescentes, personas adultas y personas adultas mayores.

Cada uno de los ejercicios requiere el uso de las TIC.

**2** Para familiarizarse con el método de mínimos cuadrados, se propone la siguiente metodología: se definen la función $f$ y el conjunto de puntos dados en la tabla. **Completa** la tabla. Con estos datos, **calcula** las constantes $\hat{a}$, $\hat{b}$ y **obtén** nuevamente la función $f$ que en cada ítem se define. **Representa** el conjunto de puntos y la función $f$.

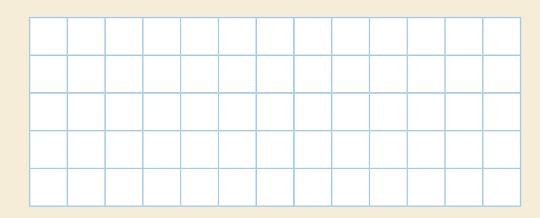
a) $y = f(x) = 1{,}2 + 1{,}5x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

| $x$ | 0,5 | 1,0 | 2,1 | 2,6 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | | | | | |



b) $y = f(x) = -0{,}8 + 0{,}65x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

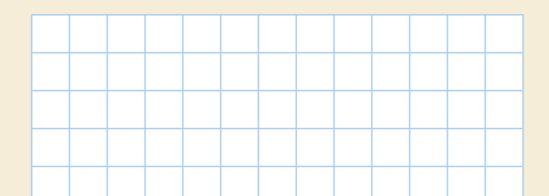
| $x$ | 1,5 | 3,0 | 4,1 | 4,6 | 5,0 | 5,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | | | | | | |



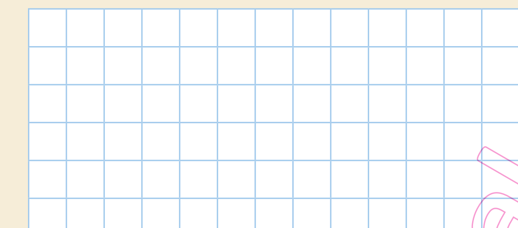
**3** **Considera** el conjunto de datos:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1{,}1),\ (1{,}5;\ 2{,}5),\ (2{,}5;\ 5{,}5), \\ (4{,}1,\ 10{,}3),\ (5{,}2;\ 13{,}6),\ (6,\ 16) \end{array} \right\}.$$

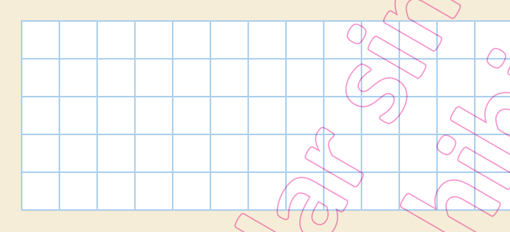
a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** gráficamente este conjunto de datos. **Explica** si tiene o no la tendencia de una recta.



b) **Aplica** el método de mínimos cuadrados para calcular las constantes $\hat{a}$, $\hat{b}$.
Para el efecto, **calcula** las sumas $S_1$, $S_2$, $R_1$, $R_2$, arriba definidas, y con estas **obtén** $\hat{a}$, $\hat{b}$.



c) Verifica que la función $F$ obtenida es $F(x) = -2 + 3x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Al trabajar con compañeros con alguna discapacidad se de fomentar valores cooperativos y de colaboración entre todos.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**4** El profesor de Educación Física mide las distancias recorridas (en metros) para diferentes tiempos (en segundos) de un estudiante que se entrena diariamente. Los resultados están registrados en el conjunto:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (4; 45{,}42), (6{,}5; 60{,}3), (11; 88{,}2), \\ (14, 107), (18, 131) \end{array} \right\}.$$

Se busca una función de la forma $d(t) = s + vt, \quad \forall t \geq 0$, siendo $s$ la distancia inicial, y siendo $v$ la velocidad.

a) Con una escala apropiada, en el sistema de coordenadas rectangulares **representen** gráficamente este conjunto de datos $D$. **Expliquen** si tiene o no la tendencia de una recta.

b) **Apliquen** el método de mínimos cuadrados para calcular las constantes $\hat{s}$, $\hat{v}$. Para el efecto, **calculen** las sumas $S_1$, $S_2$, $R_1$, $R_2$, arriba definidas, y con estas **obtengan** $\hat{s}$, $\hat{v}$.

c) En el entrenamiento se obtuvo la función $d$, definida como $d(t) = 20 + 6{,}2t, \quad \forall t \geq 0$. ¿Concuerdan con los datos actuales?

**5** Los resultados que constan en la tabla

| *Días t* | 5 | 8 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Consumos C (en Kw/h)* | 60,5 | 88,0 | 152,7 | 198,1 | 245 | 291 |

corresponden a consumos de energía eléctrica de una casa. Se busca una función de consumo eléctrico de la forma $C(t) = p + ht, \quad \forall t \geq 0$, siendo $p$ la pérdida, $h$ una constante, y siendo $t \in [0, 30]$ el tiempo contado en días del mes.

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representen** este conjunto de datos. ¿Tiene tendencia de una recta? **Expliquen**.

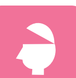
b) **Apliquen** el método de mínimos cuadrados para calcular las constantes $\hat{p}$, $\hat{h}$. Para el efecto, con los datos de la tabla, **calculen** las sumas $S_1$, $S_2$, $R_1$, $R_2$, arriba definidas, y con estas obtengan $\hat{p}$, $\hat{h}$.

c) El mes pasado se obtuvo un consumo muy similar y se obtuvo la función $C(t) = 14{,}4 + 9{,}22t, \quad \forall t \geq 0$. ¿Concuerda esta función con los datos actuales? **Comparen** con sus resultados.



**Saberes previos**

¿Cómo obtienes la media aritmética de un conjunto de datos?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué relación puede existir entre la dispersión y la media aritmética?

**Recuerda que...**

La covarianza es, de modo intuitivo, una especie de medida promedio de la dependencia lineal. En algunos libros, a la covarianza muestral también se le suele designar con $S_{xy}$.

**Glosario**

covarianza. En probabilidad y estadística, la covarianza es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias.

# Dependencia lineal y covarianza

Se dispone del conjunto de datos: $S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Interesa saber qué tan precisa es la función que consiste en un polinomio de grado ≤ 1, obtenido con el método de mínimos cuadrados, llamado recta de regresión, de modo que pueda ser utilizado para predecir o calcular el valor de $y$ para un dato particular $x$. Más aún, interesa determinar cuándo hay una dependencia lineal entre las dos variables. Para ello, obtenemos la dispersión de valores de $x_i$ alrededor de la media aritmética $\bar{x}$. Tomando en consideración la definición de media aritmética,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x},$$

y las propiedades del sumatorio, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}.$$

Entonces, la dispersión de valores de $x_i$ alrededor de $\bar{x}$ está definida como

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right).$$ Nota que $s_x > 0$.

**Definición.** La covarianza muestral se denota con $cov(x, y)$ y se define como

$$cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}.$$

La covarianza puede ser positiva, cero o negativa. Tomando en cuenta las relaciones

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y},$$

se obtiene,

$$cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \bar{x}y_i - \bar{y}x + \bar{x}\bar{y})}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}y_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i x + \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\bar{y}}{n-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n-1}.$$

*Ejercicio resuelto*

Para el conjunto de datos:

$S = \{(1; 3{,}6), (1{,}5; 4{,}35), (2{,}1; 5{,}25), (2{,}9; 6{,}45), (3{,}2; 6{,}9)\}$, se tiene

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{10{,}7}{5} = 2{,}14, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{26{,}55}{5} = 5{,}31, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 61{,}935, \\ cov(x, y) = S_{xy} = \dfrac{61{,}935 - 5 \times 2{,}14 \times 5{,}31}{5} = 1{,}279\ 5. \end{cases}$$

La ecuación cartesiana de la recta que pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y tiene una pendiente $\hat{b}$ está definida como

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y - \bar{y} = \hat{b}(x - \bar{x}),$$

siendo $\bar{x}, \bar{y}$ las medias aritméticas de $\{x_i \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$ y de $\{y_i \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$. Esta recta se llama recta de regresión. El coeficiente de regresión lineal $\bar{b}$ (pendiente de la recta) se expresa como: $\hat{b} = \dfrac{cov(x, y)}{s_x^2}$.

## Correlación, regresión y predicción

Considera un conjunto de datos $C = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$, en el que el dato $x_i$ denota una observación o medida de la variable independiente $x$ y el dato $y_i$ es la observación o medida de la variable dependiente $y$. A este conjunto nos referiremos como la muestra C. Interesa saber qué tan fuerte es la relación entre estas dos variables. Para ello, se requiere de alguna medida que muestre la relación entre ellas. A esta medida se la conoce como coeficiente de correlación, y se la designa con la letra $r$.

La media aritmética y la varianza de las variables "$x$" y "$y$" están dadas como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},\quad s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,\quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n},\quad s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2.$$

La covarianza $cov(x, y) = S_{xy}$ de la muestra está dada como

$$cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1}.$$

**Definición.** El coeficiente de correlación $r$ de la muestra C está definido como

$$r = \frac{S_{xy}}{s_x s_y}.$$



### Recuerda que...

El coeficiente de regresión lineal $\bar{b}$ (pendiente de la recta) se expresa como:

$$\hat{b} = \frac{cov(x, y)}{s_x^2}.$$

En efecto,

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n^2\bar{x}\bar{y}}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right)}{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)}$$

$$= \frac{cov(x, y)}{s_x^2}.$$

Nota que primero se ha dividido numerador y denominador por $n$, y luego por $n - 1$. Por otro lado, tenemos la constante de regresión $\hat{a}$ definida como

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$= y - \hat{b}x.$$

### Glosario

correlación. Medida de la dependencia existente entre variables aleatorias.

dependencia. Relación de origen o conexión.

Como $S_{xy}$ puede ser positivo, cero o negativo, $r$ tiene el mismo signo que $S_{xy}$. De la definición del coeficiente de correlación $r$, se tiene

$$r = \frac{S_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right]}}.$$

Además: $S_{xy} = r s_x s_y$, y; $-1 \leq r \leq 1$.

Para un ajuste lineal en mínimos cuadrados, el coeficiente $\hat{b}$ está definido como

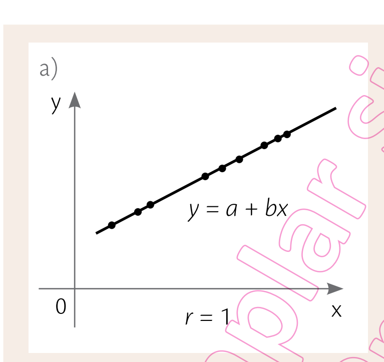
$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{s_x^{\,2}} = \frac{r s_x s_y}{s_x^{\,2}} = r\frac{s_y}{s_x}.$$

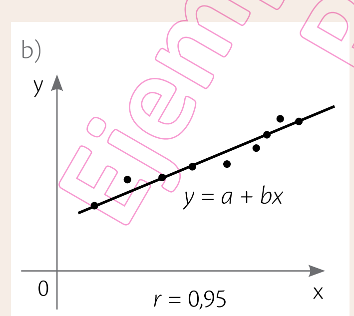
La ecuación cartesiana de la recta de regresión $R$ está definida como

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y - \bar{y} = \hat{b}(x - \bar{x}),$$

siendo $\bar{x}$, $\bar{y}$ las medias aritméticas de $\{x_i \in \mathbb{R} \mid i = 1, \ldots, n\}$, y de $\{y_i \in \mathbb{R} \mid i = 1, \ldots, n\}$.

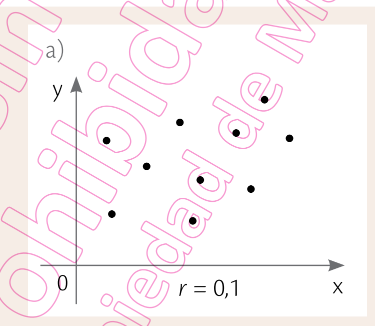
En las Figuras 5.16., 5.17. y 5.18. se muestran conjuntos de datos con su correspondiente coeficiente de correlación.

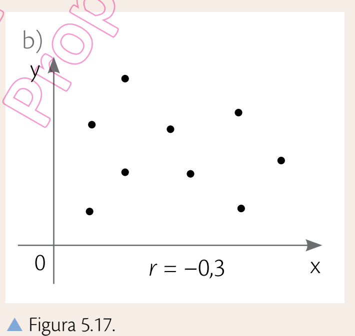



▲ Figura 5.16.

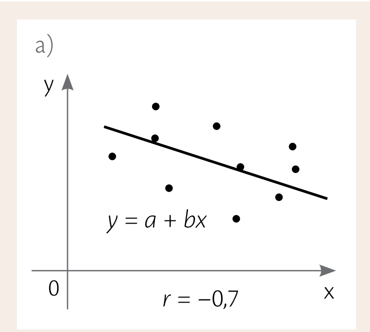
En las figuras a) y b) (5.16.) se muestran dos conjuntos de datos correlacionados con pendientes positivas.

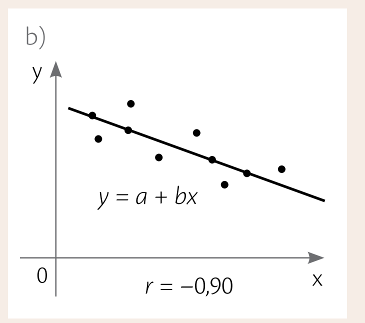



▲ Figura 5.17.

Las figuras a) y b) (5.17.) muestran dos conjuntos de datos débilmente correlacionados; es decir, no se tiene la tendencia de una recta.




▲ Figura 5.18.

Las figuras a) y b) (5.18.) muestran dos conjuntos de datos correlacionados con pendientes negativas.

*Ejercicio resuelto*

En un laboratorio de materiales se estudia la relación entre la deformación $x$ medida en mm, y la dureza $y$ del material, medida en $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$. Se realizan cinco ensayos cuyos resultados se muestran en el conjunto $C$:

$$C = \{(8; 55{,}7), (11; 52{,}1), (16; 45{,}8), (25; 36{,}0), (32; 23{,}9)\}.$$

Con estos datos, se calculan los valores siguientes:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 92;\ \bar{x} = \frac{92}{5} = 18{,}4;\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 2\,090,$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 213{,}5;\ \bar{y} = \frac{213{,}5}{5} = 42{,}7;\ \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 9\,781{,}75,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 3\,416{,}3,$$

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(2\,090 - \frac{(92)^2}{5}\right) = 99{,}3,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{5} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} y_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(9\,781{,}75 - \frac{(213{,}5)^2}{5}\right) = 166{,}325,$$

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{3\,416{,}3 - 5 \times 18{,}4 \times 42{,}7}{4} = -128{,}025,$$

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{s_x^2} = \frac{-128{,}025}{99{,}3} = -1{,}289\,3.$$

La recta de regresión está definida como

$$y - 42{,}7 = -1{,}289\,3(x - 18{,}4) \Leftrightarrow y = 66{,}422\,66 - 1{,}289\,3x,\ \ x > 0.$$

Calculamos el coeficiente de correlación $r$:

$$r = \frac{S_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-128{,}025}{\sqrt{99{,}3 \times 166{,}325}} = -0{,}996\,2.$$

Este resultado nos muestra que las dos variables están fuertemente correlacionadas.

Para una deformación $x = 20$ mm, se obtiene

$$y = 66{,}4226\,6 - 1{,}289\,3 \times 20 = 40{,}636\,6\ \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}.$$



**Interdisciplinariedad**

**Matemática y economía**

El concepto mismo de correlación está muy relacionado con el ámbito de la economía cuando se analiza la facturación de una empresa en un período de tiempo, y también en el análisis de cómo influye la publicidad en esta facturación.



Shutterstock, (2020). 261250367

▲ Conjunto de monedas.

# Taller práctico

DCCD: M.5.3.22. Calcular la covarianza de dos variables aleatorias para determinar la dependencia lineal (directa, indirecta o no existente) entre dichas variables aleatorias.



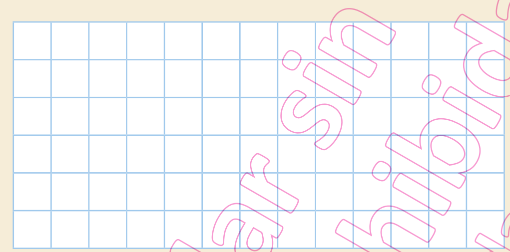
**1** **Considera** el conjunto de datos:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1{,}5; 2{,}5), (2{,}5; 5{,}5), \\ (4{,}1; 10{,}3), (5{,}2; 13{,}6), (6, 16) \end{array} \right\}.$$

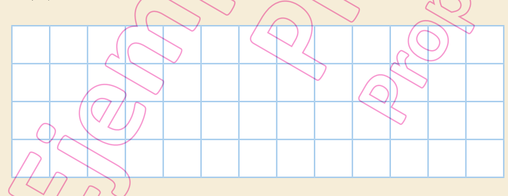
a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** gráficamente este conjunto de datos. **Explica** si el conjunto tiene o no la tendencia de una recta.



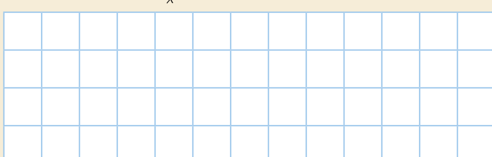
b) **Aplica** el método de mínimos cuadrados para calcular las constantes $\hat{a}$, $\hat{b}$. Para el efecto, **calcula** las sumas $S_1$, $S_2$, $R_1$, $R_2$, y con estas **obtén** $\hat{a}$, $\hat{b}$.



c) **Verifica** que la función $F$ obtenida es $F(x) = -2 + 3x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



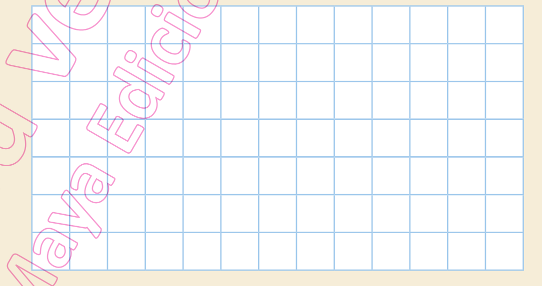
d) **Calcula** la covarianza $S_{xy}$, la dispersión $s_x^2$ y **prueba** que $\frac{S_{xy}}{s_x^2} = 3$.



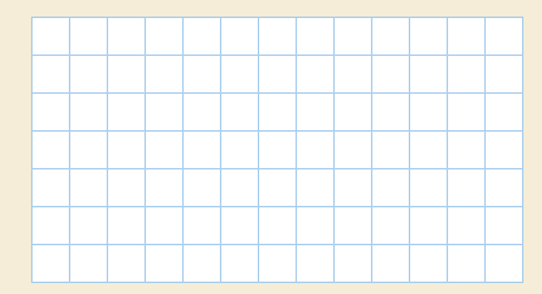
**2** Los resultados que constan en la tabla corresponden a consumos de energía eléctrica. Se busca una función de consumo eléctrico de la forma $C(t) = p + ht, \quad \forall t \geq 0$, siendo $p$ la pérdida, $h$ una constante, y siendo $t \in [0, 30]$ el tiempo contado en días del mes.

| *Días t:* | 5 | 8 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Consumos C (en Kw/h):* | 60,5 | 88,0 | 152,7 | 198,1 | 245 | 291 |

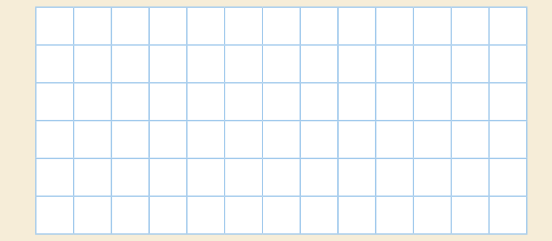
a) **Aplica** el método de mínimos cuadrados para calcular las constantes $\hat{p}$, $\hat{h}$.



b) **Calcula** $\hat{h} = \frac{S_{tC}}{s_t^2}$ y $\hat{p} = \overline{C} - \overline{t}\,\frac{cov(t, C)}{s_t^2}$, y **compara** con los resultados obtenidos en el literal a.



c) **Compara** los resultados con la función $C(t) = 14{,}4 + 9{,}22t, \quad \forall t \geq 0$.



M.5.3.23. Determinar la recta de regresión lineal que pasa por el centro de gravedad de la distribución para predecir valores de la variable dependiente, utilizando la recta de regresión lineal, o calcular otra recta de regresión intercambiando las variables para predecir la otra variable.

**3** En cada ítem, **completa** la tabla. Con estos datos, **calcula** las constantes $\hat{a}$, $\hat{b}$ y **obtén** nuevamente la función $f$ que en cada caso se define. **Calcula** el coeficiente de correlación y **comprueba** con el dato $r$ que se indica. En el plano cartesiano, **representa** el conjunto de puntos y la función $f$.

a) $y = f(x) = 3{,}2 + 4{,}5x, \quad \forall x > 0, \quad r = 1.$

| $x$ | 0,5 | 1,0 | 2,1 | 2,6 | 3,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$: | | | | | |

b) $y = f(x) = -2{,}8 + 1{,}65x, \quad \forall x > 0, \quad r = 1.$

| $x$ | 1,5 | 3,0 | 4,1 | 4,6 | 5,0 | 5,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$: | | | | | | |

c) $y = f(x) = 70{,}3 - 3{,}45x, \quad \forall x > 0, \quad r = 1.$

| $x$ | 2,5 | 6,0 | 10,4 | 16,0 | 20,6 | 28,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$: | | | | | | |

## Trabajo colaborativo



**Diversidad funcional en el aula**

Si en el aula existe un estudiante con alguna discapacidad es importante reflexionar sobre los conceptos de diversidad, inclusión social, igualdad de oportunidades entre otros.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**4** Sean $S$ el conjunto de puntos $S = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$, y la ecuación cartesiana de la recta de regresión lineal definida como $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y = \hat{a} + \hat{b}x$, donde $\hat{a}$, $\hat{b}$ son calculados con el método de mínimos cuadrados. **Demuestren** que:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \bar{y} - \bar{x}\,\frac{cov(x, y)}{s_x^2}.$$

**5** En la zona de Íntag, una geóloga recoge muestras del suelo. De cada muestra, mide su densidad $d$ en $\frac{g}{cm^3}$ y luego mide el contenido de hierro $C$ en % (masa de hierro en g/masa de muestra en g), que se detallan en el siguiente conjunto:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (3{,}4;\ 30), (3{,}2;\ 34), (2{,}8;\ 26), (2{,}9;\ 24), \\ (3{,}0;\ 28), (3{,}1;\ 28), (3{,}2;\ 29), (3{,}2;\ 34), \\ (3{,}3;\ 27), (3{,}12;\ 29{,}8). \end{array} \right\}$$

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representen** este conjunto de puntos.

b) **Calculen** la media aritmética $\bar{d}$, $\bar{C}$.

c) **Calculen** la dispersión $s_d^2$ y la covarianza $S_{dc} = cov(d, C)$.

d) **Obtengan** la ecuación de la recta de mejor ajuste. En otro estudio, se obtuvo la ecuación $C = -7{,}85 + 11{,}095d, \quad d > 0$. **Comparen** su resultado con el dado por el otro estudio.

e) **Calculen** el coeficiente de correlación $r$.

## Solución de problemas cotidianos

### Un problema de transporte simplificado

**1.** En una ciudad, hay 2 depósitos de gas, 6 restaurantes y 10 panaderías. Diariamente se entregan 8 cilindros de cada depósito de gas, y el segundo depósito siempre hace entregas a los restaurantes y a las panaderías. Los restaurantes reciben 6 cilindros de gas y las panaderías reciben 10.



▲ Cilindros de gas.

Shutterstock, (2020). 529741768

El costo de transporte de un cilindro de gas del primer depósito a los restaurantes es de \$ 0,75 y a las panaderías es de \$ 0,65. El costo de transporte de un cilindro de gas del segundo depósito a los restaurantes es de \$ 0,70 y a las panaderías es de \$ 0,8. Lo que nos interesa es planificar el transporte de gas para que el costo sea mínimo.

i) **Modelo matemático**

Designamos con $x_1$ y $x_2$ al número de cilindros de gas del primer depósito que lleva el gas a los restaurantes y a las panaderías, respectivamente. Con $v_1$ y $v_2$ se designa el número de cilindros de gas del segundo depósito que lleva el gas a los restaurantes y a las panaderías.

De la información de las distribuidoras de gas, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \quad v_1 + v_2 = 8, \quad x_1 + v_1 = 6, \\ x_2 + v_2 = 10, \quad x_i \geq 0, \quad v_i \geq 1 \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Costo de transporte:

$C_T = 0{,}75x_1 + 0{,}65x_2 + 0{,}7v_1 + 0{,}8v_2$.

Por lo tanto, interesa minimizar el costo $C_T$.

mín $C_T$.

$$\text{sujeto a} \begin{cases} x_i \geq 0, \quad v_i \geq 1 \quad i = 1, 2, & \\ x_1 + x_2 = 8, & (a) \\ v_1 + v_2 = 8, & (b) \\ x_1 + v_1 = 6, & (c) \\ x_2 + v_2 = 10. & (d) \end{cases}$$

ii) **Conjunto de soluciones factibles**

De $(c)$ obtenemos $v_1 = 6 - x_1$ y de $(d)$, $v_2 = 10 - x_2$. Como $v_1 \geq 1$, $v_2 \geq 1$, se sigue que $6 - x_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 \leq 5$, $10 - x_2 \geq 1 \Rightarrow x_2 \leq 9$.

Reemplazando $v_1$ y $v_2$ en $(b)$, se tiene

$6 - x_1 + 10 - x_2 = 8$,

$x_1 + x_2 = 8$,

que es idéntica a la restricción $(a)$.

Como $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, resulta que

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 9, \quad v_1 = 6 - x_1, \\ v_2 = 10 - x_2, \quad x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 8 - x_1. \end{cases}$$

Reemplacemos $v_1$, $v_2$ y $x_2$ en el costo $C_T$.

$C_T = 0{,}75x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}7(6 - x_1) + 0{,}8(10 - x_2)$

$= 0{,}05x_1 - 0{,}15x_2 + 12{,}2$

$= 0{,}05x_1 - 0{,}15(8 - x_1) + 12{,}2 = 0{,}2x_1 + 11.$

Puesto que $0 \leq x_1 \leq 5$, se tiene la función

$f(x) = 0{,}2x_1 + 11. \quad x_1 \in [0, 5]$.

Claramente $\min\limits_{x \in [0,5]} f(x) = 11$, valor que se alcanza en $x_1 = 0$. Luego $\hat{v}_1 = 6$, $\hat{x}_2 = 8$ y $\hat{v}_2 = 2$. Por lo tanto, se debe planificar la distribución de gas del siguiente modo:

| | Restaurantes | Panaderías |
|---|---|---|
| *Depósito de gas # 1* | 0 | 8 |
| *Depósito de gas # 2* | 6 | 2 |
| *Total* | 6 | 10 |

**[ Practica en tu cuaderno ]**

### Modelo de dieta

**2.** Dos alimentos básicos para el desayuno de niños y niñas son el pan y la leche. De estos dos alimentos, consideramos dos nutrientes importantes: la proteína y la energía (calorías). Supongamos que un pan (aproximadamente 20 g) tiene 7 g de proteína y calorías, y que una taza de leche (aproximadamente 250 cm$^3$) tiene 6 g de proteína y 140 calorías. El costo de un pan es \$ 0,12 y el de una taza de leche es \$ 0,16.



▲ Pan y leche.

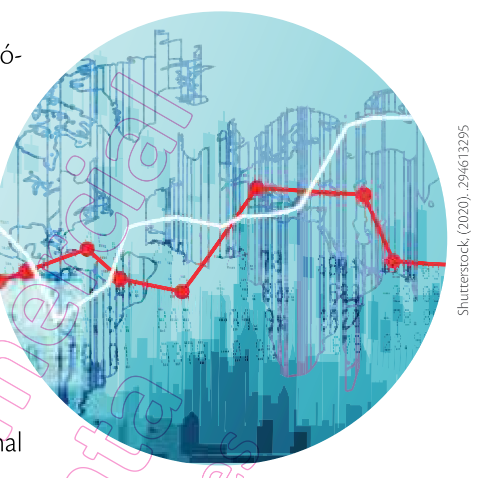
Shutterstock, (2020). 26939497

Estudia el caso con 40 panes y 40 tazas de leche al mes, y que mensualmente proporcionen al menos 300 g de proteína y 5 000 calorías.

# La matemática en la Ingeniería Estadística

¿Cuál es el profesional que se encarga del estudio de la dinámica económica, social, política y ambiental de una sociedad? ¿Qué carrera permite estudiar cantidades masivas de información, discriminando lo subjetivo de lo real y asesorando en lo que respecta a la toma de decisiones efectivas que transformen activamente a la sociedad?

La Ingeniería Estadística es una carrera que forma profesionales con capacidad de formular planes y propuestas de producción, publicación y distribución de información estadística. La matemática aporta una serie de herramientas fundamentales como, por ejemplo, la teoría de conjuntos, modelos probabilísticos, modelos determinísticos, entre otros, conocimientos que le permiten al profesional describir una situación del mundo real en términos matemáticos.



Shutterstock, (2020). 294613295

▲ Aplicación de la estadística en el análisis de datos.



# Ingeniería en Estadística

El ingeniero o la ingeniera en Estadística es un profesional competente en actividades como análisis, investigación y consultoría en calidad, industria, investigación de mercados, seguros, minería de datos, diseño de encuestas y censos. Asimismo, tiene el conocimiento necesario para implementar técnicas y métodos estadísticos en el tratamiento de pequeños y grandes volúmenes de datos, desde su recolección y tabulación, hasta su análisis univariado y multivariado, aplicando la matemática, estadística e informática, y la formulación e interpretación de modelos que relacionen dos o más variables para tomar decisiones, efectuar pronósticos, describir situaciones o procesos, diseñar y realizar experimentos en el campo científico, industrial y social.

Shutterstock, (2020). 532721611

▲ Ingeniería en Estadística.

El campo ocupacional para esta carrera incluye lo siguiente: departamentos de estadística y control de calidad de empresas administrativas y de servicios; compañías de seguros, actuariales y empresas financieras; proyectos de gestión de calidad y optimización de recursos; empresas de investigación de mercado, sondeos y marketing; y empresas afines.

El bachiller que postula a esta carrera debe cumplir con el siguiente perfil:

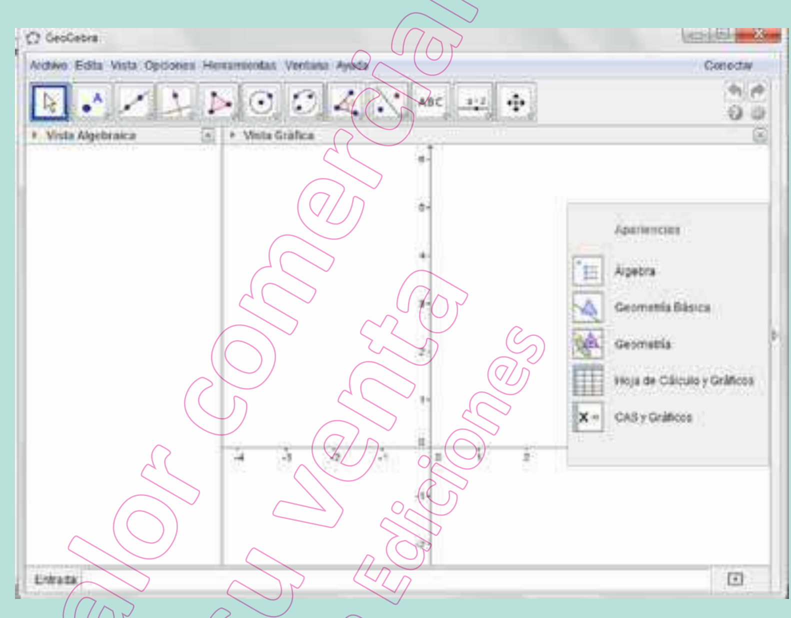
- Sólidos conocimientos de matemática.
- Conocimientos básicos en informática.
- Espíritu emprendedor, capaz de resolver problemas multidisciplinarios.
- Pensamiento crítico y analítico.

Adaptado de: http://www.universia.com.ec/estudios/uce/ingenieria-estadistica/st/226368

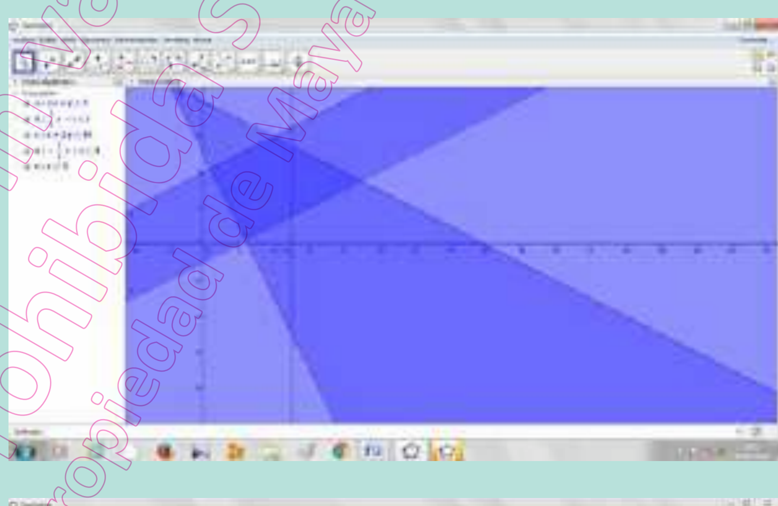
## Región factible y GeoGebra

Para determinar la región factible de una serie de restricciones, sigue los siguientes pasos.

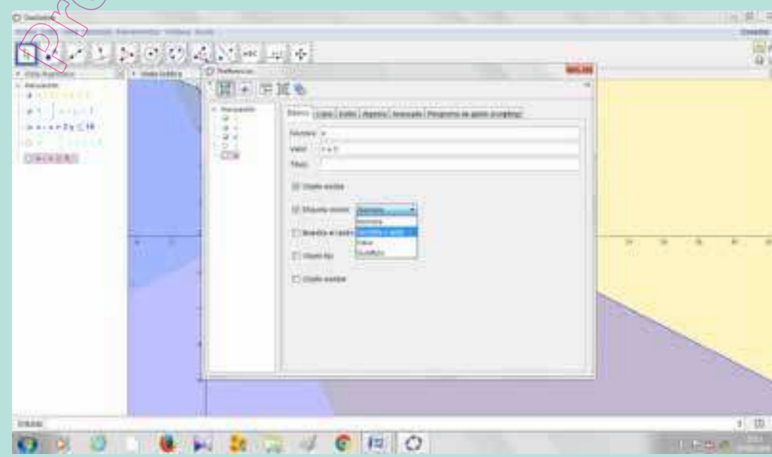
**1.** **Abre** un documento en GeoGebra utilizando la *Vista Gráfica* y *Vista Algebraica*. En estas ventanas podrás apreciar la construcción de cada una de las restricciones planteadas en el problema.

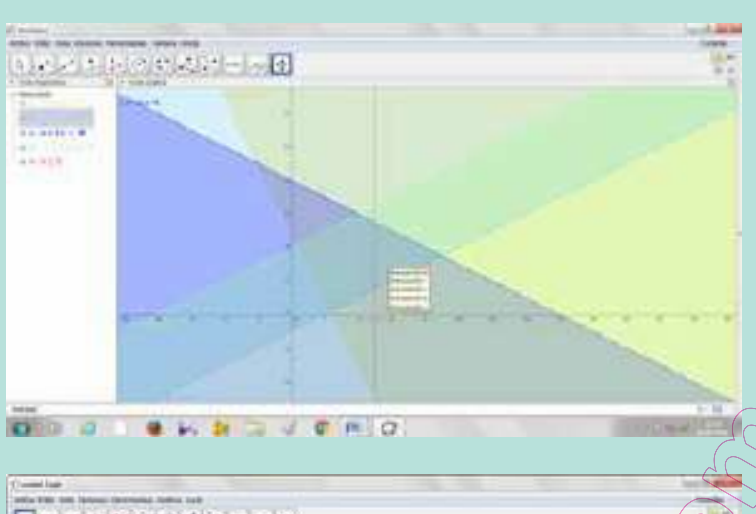



**2.** **Ingresa** cada una de las restricciones en su escritura original (inecuaciones). En la *Vista Algebraica* **observa** que cada una es asignada por una letra.

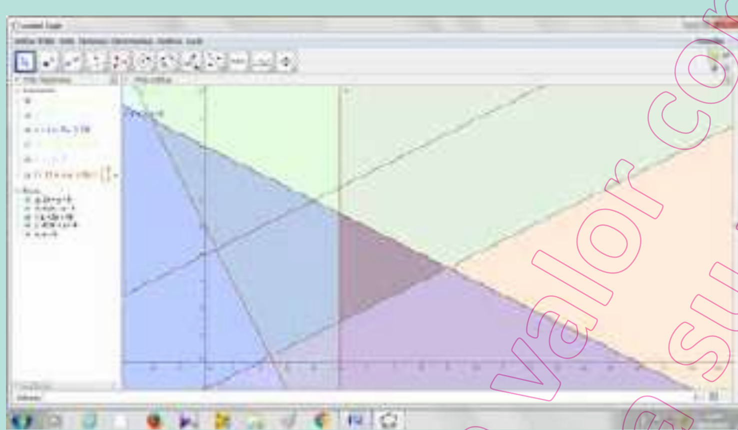


**3.** Para personalizar tu tarea sobre cualquier restricción, **haz** clic izquierdo y **escoge** *Propiedades*. Desde este menú, puedes cambiar el color. En la opción *Básico*, etiqueta *Visible*, **escoge** *Nombre y valor*. Esta opción te permite visualizar cada una de las restricciones con su correspondiente color.

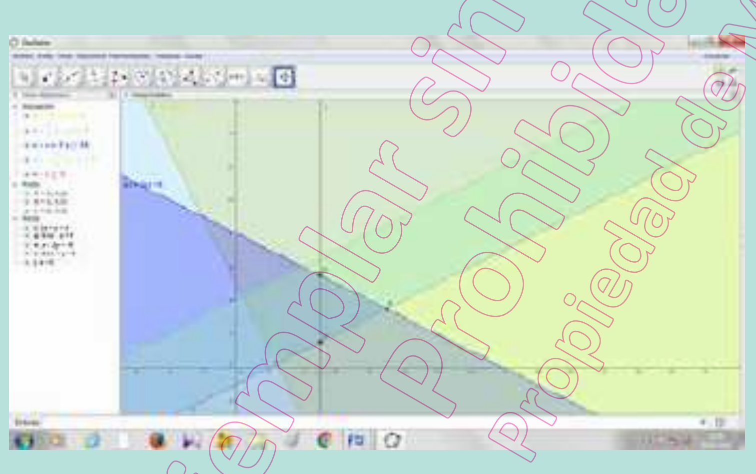




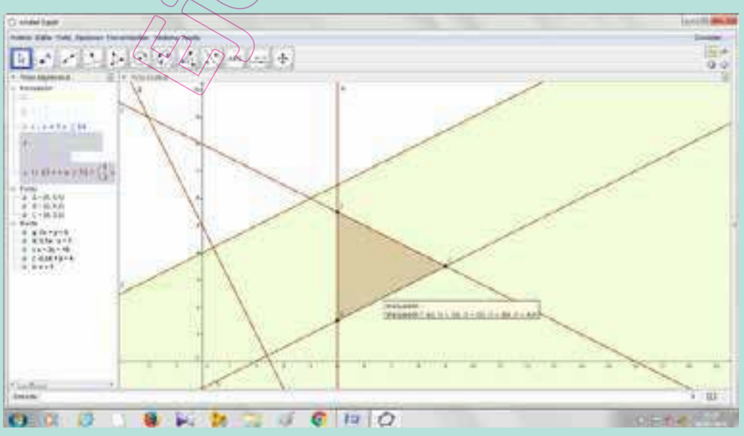
4. Con el *mouse* **explora** cada una de las regiones e **identifica** cuál de ellas interseca a todas las restricciones. Esta región toma el nombre de región factible (conjunto de soluciones que satisface a todo el conjunto de restricciones, y que puede ser acotado o no).



5. Para determinar la región factible con un color diferente, **escribe** en la barra de *Entrada* a$$b$$c$$d$$e o utiliza las letras que asignó el programa a cada restricción. Luego, para identificar los puntos de intersección de la región factible, **convierte** a las restricciones en ecuaciones e **ingrésalas** en el programa.



6. Una vez identificada la región factible, **ubica** el cursor en cada una de las intersecciones para conocer qué restricciones forman el punto de intersección. En la barra de *Entrada* escribe *Interseca [a,b]* o escribe *Inter* y se desplegará un menú con varias opciones. **Escoge** *Interseca* [<objeto>,<objeto>]. **Reemplaza** por las letras correspondientes a las restricciones que se intersecan.



7. Para apreciar solo la región factible, **apaga** cada una de las restricciones; **haz** clic en el botón izquierdo de cada restricción.

- **Practica** con ejercicios de programación lineal.

# Desafíos y proyectos matemáticos

## Tema: Consumo responsable de los servicios básicos

### Recursos
- Materiales de oficina: cartillas, hojas, cartulinas, marcadores
- Tecnológicos: calculadora, *tablet*, celular, computadora con la aplicación GeoGebra
- Internet

### Justificación
La regresión lineal es un análisis numérico dentro de la optimización matemática, en el que (dados un conjunto de pares ordenados llamados variable independiente y dependiente) se desea encontrar una mejor aproximación a los datos, de acuerdo con el mínimo error cuadrático. La regresión se encuentra presente en toda actividad humana. En el hogar es útil, pues permite conocer cuán responsable se es en el consumo de bienes y servicios, en la capacidad de ahorrar y prever para el futuro. Las empresas se benefician de la predicción, pues a través de ella toman decisiones acertadas de producción y ahorro, lo cual permite generar más fuentes de trabajo.



▲ Consumo de agua potable..

Shutterstock, (2020). 44628754

### Objetivos
- Utilizar la regresión lineal para conocer el comportamiento de las variables *pago de servicios básicos* y el *consumo* de estos.
- Construir bases de datos *X* para el rubro de cuánto se cancela por agua, luz, teléfono o Internet; y *Y* para la variable de consumo.
- Generar una campaña que oriente a un consumo responsable de los servicios básicos.

### Actividades
- Formen equipos de dos o tres estudiantes. Cada estudiante recopilará las cartillas de un servicio básico diferente (de al menos 6 meses atrás) de la misma vivienda.
- Generen una tabla de datos con las siguientes características: *X* para el rubro de cuánto se cancela y *Y* para el consumo (el cual se aprecia en el diagrama de barras o sectores, anexo a la cartilla).
- Utilicen GeoGebra para conocer cada una de las medidas de análisis: el promedio de consumo, la dispersión de consumo, la relación entre variables, y la recta de comportamiento.
- Investiguen. Para lo relativo a consumo, ¿qué significa una recta con un ángulo de giro muy grande, muy pequeño o igual a cero?
- Analicen los resultados obtenidos y contesten: ¿Qué pendiente es la ideal en lo relativo a consumos?
- Diseñen una campaña para concienciar sobre el uso responsable de los servicios básicos, utilizando los gráficos obtenidos. Expliquen a sus compañeros y compañeras que un uso adecuado de servicios implica que otras localidades posean este servicio y se genera, así, una cultura de ahorro.



Shutterstock, (2020). 252577492

▲ Grupo de estudiantes.

### Conclusiones
La regresión lineal sirve para explorar datos y confirmar teorías.
La regresión lineal sirve para explicar el comportamiento de variables.
La regresión lineal se halla presente en todas las áreas del conocimiento.

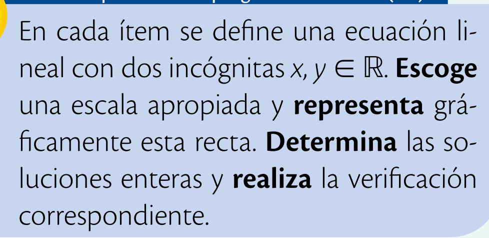
# En síntesis



Geometría y medida
Estadística y probabilidad
Shutterstock, (2020). 523447867
Transporte comercial.
Shutterstock, (2020). 550809355
Ahorro y crecimiento.
Geometría y medida
Ecuaciones lineales con dos incógnitas, soluciones enteras
Divisibilidad en $\mathbb{Z}$, mcd-mcm de números enteros
Ecuaciones lineales con dos incógnitas, soluciones no negativas
Aplicaciones
Programación lineal
Conjunto de soluciones factibles
Punto extremo y solución óptima. Solución gráfica
Vértices de la región factible. Determinación del valor extremo
Modelización de problemas de programación lineal
Modelo simple de línea de producción
Modelo en la industria química
Problema de transporte simplificado
Estadística y probabilidad
Regresión y correlación
Análisis de relación entre dos variables. Diagramas de dispersión
Regresión lineal simple. Método de los mínimos cuadrados
Dependencia lineal y covarianza
Correlación, regresión y predicción

# Evaluación sumativa

**[Heteroevaluación]**



I.M.5.8.1. Utiliza métodos gráficos y analíticos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y de inecuaciones, para determinar el conjunto de soluciones factibles y la solución óptima de un problema de programación lineal. (I.3.)

**1** En cada ítem se define una ecuación lineal con dos incógnitas $x, y \in \mathbb{R}$. **Escoge** una escala apropiada y **representa** gráficamente esta recta. **Determina** las soluciones enteras y **realiza** la verificación correspondiente.

a) $3x - 7y = 10$.

b) $x + 4y = 7$.

**2** Se definen los conjuntos

$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x - 2y \geq -2\}$,

$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 0{,}5y \geq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 6\}$,

y $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$. En el sistema de coordenadas rectangulares $xy$, representa cada conjunto y $S$. **Obtén** los vértices de $S$.

**3** **Resuelve** el problema de programación lineal

$$máx\ z = 4x + 5y$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} x + 2y \leq 6, \\ 5x + 4y \leq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **determina** gráficamente la región de soluciones factibles y **verifica** que los vértices son $(0, 0)$, $(0, 3)$, $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$, $(4, 0)$.

b) **Muestra** que $máx\ z = 19$ y **obtén** el punto en el que lo alcanza.

**4** **Resuelve** el problema de programación lineal.

$$mín\ z = -2x + 3y$$

$$\text{sujeto a} \begin{cases} -x + y \leq 1, \\ x + 2y \geq 4, \\ 4x + 5y \leq 20, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

I.M.5.11.1. Grafica un diagrama de dispersión y la recta de dispersión para analizar la relación entre dos variables; calcula el coeficiente de correlación para interpretar si dicha relación es nula, débil, moderada, fuerte o perfecta; realiza un análisis bidimensional y, mediante la recta de regresión, efectúa predicciones, justificando la validez de sus hallazgos y su importancia para la toma de decisiones asertivas. (J.2., I.3.)

**5** **Completa** la tabla. Con estos datos, **aplica** el método de mínimos cuadrados, **calcula** las constantes óptimas $\hat{a}$, $\hat{b}$ y obtén nuevamente la función $f$ que se define. Representa el conjunto de puntos y la función $f$.

$y = f(x) = 50 - 1{,}4(x - 2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

| $x$ | 2,5 | 6,0 | 10,4 | 16,0 | 20,6 | 28,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | | | | | | |

**6** En una ciudad se lleva un registro del crecimiento del área urbana desde el año 90. Los datos se muestran en la tabla.

| *Tiempo t (años):* | 1990 | 1998 | 2002 | 2007 | 2012 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Área C (km²):* | 4,4 | 8,056 | 9,884 | 12,169 | 14,45 | 15,8 |

Se busca una función de la forma $A(t) = s + k(t - 90)$, $\forall t \geq 90$, siendo $s$ el área inicial, siendo $k$ una constante relacionada con la rapidez de crecimiento de la ciudad, y siendo $t \geq 90$ el tiempo contado en años.

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** gráficamente este conjunto de datos. ¿Tiene la tendencia de una recta? **Explica**.

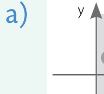
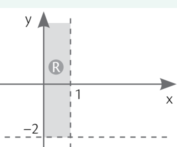
b) **Aplica** el método de mínimos cuadrados para calcular las constantes $\hat{s}$, $\hat{k}$. Para el efecto, con los datos de la tabla, **calcula** las sumas $S_1$, $S_2$, $R_1$, $R_2$, arriba definidas, y con estas **obtén** $\hat{s}$, $\hat{k}$.

**Resuelve** cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

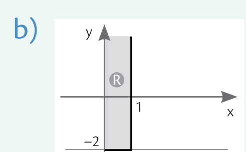


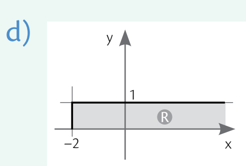
**7** La solución del sistema de inecuaciones lineales

$$\begin{cases} x > -2 \\ 0 \leq y < 1 \end{cases}$$ es:

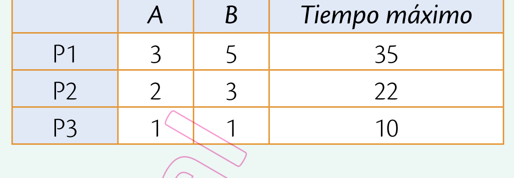
a)




c)

b)



d)



**8** La siguiente tabla muestra la producción de dos artículos que pasan por tres procesos diferentes.



| | A | B | *Tiempo máximo* |
|---|---|---|---|
| P1 | 3 | 5 | 35 |
| P2 | 2 | 3 | 22 |
| P3 | 1 | 1 | 10 |

a) $\begin{cases} 3x + 5y \geq 35, \\ 2x + 3y \geq 22, \\ x + y \geq 10, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y \leq 35, \\ 2x + 3y \leq 22, \\ x + y \leq 10, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y \geq 35, \\ 2x + 3y \leq 22, \\ x + y \geq 10, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 5y \leq 35, \\ 2x + 3y \geq 22, \\ x + y \leq 10, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$

**9** Con base en la función dada, **completa** la tabla y **calcula** el coeficiente de regresión.

$d = y = f(x) = -0{,}241 - 0{,}087x, \quad \forall x > 0.$

| $x$ | −2,5 | 0,0 | 2,4 | 4,6 | 8,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | | | | | |

a) $r = -1$. b) $r = 1$. c) $r = 0{,}5$. d) $r = 0$.

## [Autoevaluación]

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Resuelvo sistemas de inecuaciones lineales. | | | |
| Determino la solución óptima de un problema de programación lineal. | | | |
| Realizo diagramas de dispersión y dibujo la recta de mejor ajuste. | | | |
| Calculo e interpreto el coeficiente de correlación | | | |

## [Coevaluación]

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Todos aportamos para solucionar las actividades y problemas propuestos. | | | |
| La comunicación entre compañeros se enmarca en un ámbito de respeto y tolerancia. | | | |

## [Metacognición]

a) ¿En esta unidad, cuál es el tema que más recuerdas?

b) ¿De qué manera se utiliza los temas de esta unidad en otras áreas?

# Integración

## Fluidos e integrales

El cálculo integral se aplica en una gran cantidad de áreas y campos: mecánica, electricidad, electrónica, economía, arquitectura, biología, física, teoría de sistemas, investigación de operaciones, entre otros. Podemos ver que el campo de aplicación de las integrales es extenso y de gran utilidad. En fluidos y específicamente en flujos de agua se utiliza, por ejemplo, para relacionar el volumen de agua que pasa por un área dada en una unidad de tiempo o para relacionar el caudal de agua y la velocidad promedio del fluido.





## Observa y contesta

- ¿Qué relación encuentras entre el flujo de agua de un grifo abierto en un tiempo determinado y la cantidad de agua que se recoge?
- ¿Cómo puede ser útil la matemática en el cálculo del caudal de agua de un río?
- ¿De qué manera se relaciona la matemática con el agua, las presas y las represas?



Shutterstock, (2020). 66408271

# 6 unidad



**Bloques curriculares**

Álgebra y funciones



Shutterstock, (2020). 11750515

## Objetivos

- OG.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.
- OG.M.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.
- OG.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

Ministerio de Educación, (2016).

DCCD: M.5.1.64. Calcular la integral definida de una función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración.
M.5.1.67. Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos.
M.5.1.62. Reconocer y graficar las funciones escalonadas para calcular el área encerrada entre la curva y el eje X.

# Integración indefinida o primitiva de una función



**Saberes previos**

¿Qué es la derivada de una función?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Qué relación hay entre derivar e integrar?



**Interdisciplinariedad**

**Matemática e historia**

El cálculo diferencial surgió de las ideas del matemático francés Pierre Fermat, quien trató de resolver el problema del cálculo de los valores extremos (máximos y mínimos) de una función. Los esfuerzos realizados por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) son los que permitieron ligar los problemas del cálculo del área bajo una curva y de la tangente a la gráfica de una curva en un punto dado de esta, dando lugar así al cálculo diferencial e integral.

Con el propósito de tener una idea acerca de los temas de estudio del cálculo diferencial e integral, presentamos dos problemas que originaron el desarrollo de estos temas.

**Problema 1.** Consideremos una función real $f$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y asociemos a $f$ el grafo $G(f)$, esto es,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}.$$

En el cálculo diferencial se estudian problemas fundamentales. Por ejemplo: hallar la ecuación cartesiana o vectorial de la recta tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $P = (x_0, f(x_0))$, donde $x_0 \in ]a, b[$. Originalmente, el concepto de derivada se introdujo para resolver problemas relativos a tangentes de curvas. Más adelante, se aplicó al cálculo de velocidades y también se aplicó al estudio de variación de la función, la razón de crecimiento. Este problema ya fue tratado con funciones cuadráticas en el primer curso de bachillerato (libro 1).

Sean $h \neq 0$, $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P_1 = (x_0 + h, f(x_0 + h)) \in G(f)$.

La pendiente $m(h)$ de la recta $L_h$ que pasa por los puntos $P_0$ y $P_1$ está definida como

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \ h \neq 0,$$

con lo que la ecuación cartesiana de la recta $L_h$ se escribe como sigue:

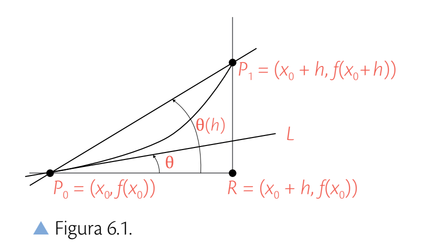
$$y - f(x_0) = m(h)(x - x_0).$$

El cociente $m(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ con $h \neq 0$ se llama cociente incremental; también es conocido como tasa de variación de la función $f$ en el punto $x_0$. Por su parte, la tangente de la medida $\theta(h)$ del ángulo que forma la recta $L_h$ y la recta que pasa por $P_0$ y

$R = (x_0 + h, f(x_0))$ está definida como

$$\tan(\theta(h)) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \ h \neq 0.$$

Para $h > 0$ se tiene $x_0 + h > x_0$. Nota que para $h > 0$ cada vez más pequeño, la recta $L_h$ se acerca cada vez más a la recta $L$, lo que implica que la pendiente $m(h)$ se aproxima cada vez más a la pendiente $m$ de $L$, y esto a su vez significa que $\theta(h)$ se aproxima a $\theta$ conforme $h \to 0^+$. En la Figura 6.1. se muestran: una porción de la gráfica de la función $f$, una porción de la recta $L_h$ que pasa por $P_0$ y $P_1$, el triángulo rectángulo $P_0RP_1$, y la recta tangente $L$ a la gráfica de $f$ en el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.




▲ Figura 6.1.

Para $h < 0$, $x_0 + h < x_0$. El punto $P_1 = (x_0 + h,\ f(x_0 + h))$ se localiza a la izquierda de $P_1$. Un razonamiento similar se da en el caso $h > 0$. Cuando la función es derivable en el punto $x_0$, se tiene

$$m = \lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{df}{dx}(x_0).$$

La recta tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ es el conjunto

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)\right\}.$$

La ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de la función $f$ en el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ está definida como

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } y - f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0).$$

**Problema 2.** Sea $f$ una función real definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Suponemos que $f(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [a, b]$.

Denotamos con $S$ la región comprendida por el eje $x$ y la gráfica de la función $f$. Esto es:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}.$$

En la Figura 6.2. se muestran regiones de dos tipos de funciones. La primera presenta discontinuidades en la función $f$, y la segunda, en el hecho de que la función $f$ es continua.

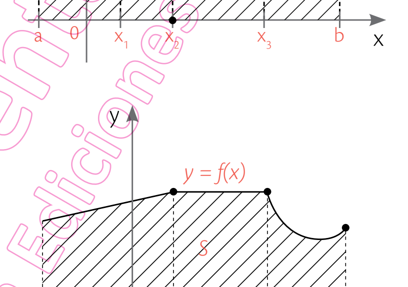



Figura 6.2.

## Integral indefinida o primitiva de una función

En temas anteriores se calcularon las derivadas de algunas funciones de los tipos que presentamos a continuación.

1. Función cuadrática

   Considera $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, con $a, b, c$ constantes reales $a \neq 0$. La derivada de esta función está definida como

$$\frac{df}{dx}(x) = 2ax + b,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

   A esta derivada se la denota también como $f'(x)$, esto es, $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$. Recuerda que esta derivada define una nueva función que es un polinomio de grado $\leq 1$.

2. Funciones polinomiales de grado $\leq 4$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

   siendo $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ fijos. La derivada de $p$ es

$$\frac{dp}{dx}(x) = p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

   que define una nueva función, o sea, un polinomio de grado $\leq 3$.

**Interdisciplinariedad**

**Matemática y otras disciplinas**

En la actualidad, el cálculo diferencial e integral no solo constituye un instrumento de cálculo en las ciencias y la técnica, sino que es también un conjunto de ideas y problemas que han sido objeto de estudio como parte del pensamiento. En ese sentido, forman parte del lenguaje que facilita la expresión de leyes y principios en forma matemática. Son la base para el desarrollo de otras áreas de la matemática, la física, la química, la biología, las ciencias económicas y sociales, y las distintas ramas de la ingeniería e industria.



**Recuerda que...**

**Integrar** es el proceso recíproco del de **derivar**. Es decir, dada una función $f(x)$, busca aquellas funciones $F(x)$ que, al ser derivadas, conducen a $f(x)$.

Se dice, entonces, que $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)$; dicho de otro modo, las primitivas de $f(x)$ son las funciones derivables $F(x)$, tales que

$$F'(x) = f(x).$$

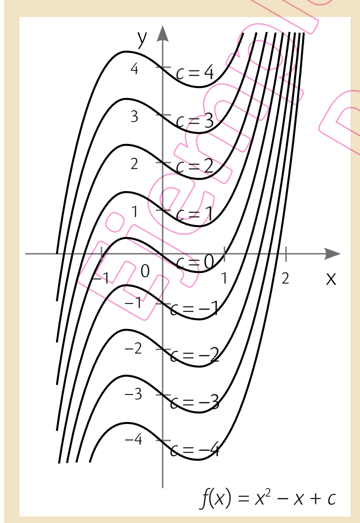
La **integral indefinida** es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

Por ejemplo, la ecuación $y = \int f(x)dx$ admite infinitas soluciones que difieren en una constante. Esto significa que las gráficas de dos primitivas cualesquiera de $f$ son traslaciones verticales una de la otra.
Por ejemplo,

$$y = \int f(3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C,$$

válida para diversos valores enteros de la constante $C$. Cada una de las primitivas es la solución de la ecuación

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 1.$$




Tomado de: http://www.cfm.cl/~rjimenez/bioingenieria/cap4.pdf

Dada la derivada $\frac{dg}{dx}(x) = g'(x)$ de una función $g$ definida en algún subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$, ¿cómo podemos recuperar la función $g$?

La definición de primitiva (llamada también integral indefinida de una función $f$) responde en parte a esta pregunta. Para simplificar la exposición, asumimos que $A = [a, b]$. En realidad, este conjunto $A$ pueden ser conjuntos $]-\infty, a[$, $]a, \infty[$, $\mathbb{R} = ]-\infty, \infty[$, entre otros.

**Definición.** Una función $P$ se dice integral indefinida de una función real $f$ en un intervalo abierto $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, si y solo si $P$ verifica

$$\frac{dP}{dx}(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a, b[.$$

A la integral indefinida también se le denomina **antiderivada** o **primitiva**. La integral indefinida de una función dada no es única. Se representa con el símbolo $\int f(x)dx$ que se lee "integral indefinida de $f(x)dx$". En la integración el símbolo $\int$ que tiene la forma de la letra S mayúscula estirada, denota o indica suma. Se tiene

$$\int f(x)dx = P(x) + c, \quad \forall x \in [a, b],$$

donde $c \in \mathbb{R}$ se dice constante arbitraria. La letra $x$ en el símbolo $\int f(x)dx$ puede ser reemplazada por cualquier otra letra. Así, $\int f(t)dt$, $\int f(s)ds$, etc., y en todos los casos designa a la misma función primitiva.

*Ejercicios resueltos*

1. Sea $f(x) = -10, \quad \forall x \in ]-1, 1[$. La función $P$ definida como $P(x) = -10x + 3, \quad \forall x \in ]-1, 1[$ es una primitiva de $f$, pues
   $$\frac{dP}{dx}(x) = -10 = f(x), \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$
   La función $P_1(x) = -10x - \frac{1}{4}, \quad \forall x \in ]-1, 1[$ es también una primitiva de $f$ ya que
   $$\frac{dP_1}{dx}(x) = -10 = f(x), \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$
   En general, $P(x) = -10x + c, \quad \forall x \in ]-1, 1[$, con $c \in \mathbb{R}$ constante, es una primitiva de $f$, pues
   $$\frac{dP}{dx}(x) = f(x) = -10, \quad \forall x \in ]-1, 1[.$$
   Se tiene $\int f(x)dx = \int -10 \cdot dx = -10x + c, \quad \forall x \in ]-1, 1[.$

2. Considera la función real $u$ definida como
   $$u(s) = \frac{1}{4}s^3 - 3s^2 - 5, \quad \forall s \in ]-2, 4[.$$
   Entonces, toda integral indefinida de $f$ viene definida como
   $$\int u(s)ds = \int\left(\frac{1}{4}s^3 - 3s^2 - 5\right)ds$$
   $$= \frac{1}{16}s^4 - s^3 - 5s + c, \quad \forall s \in [-2, 4],$$

donde $c \subset \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Nota que las derivadas de las funciones dadas por $s^4$, $s^3$, $5s$, $c$ son respectivamente $4s^4$, $3s^3$, 5, y 0. Luego,

$$\frac{dP}{ds}(s) = \frac{1}{16}(4s^3) - 3s^2 - 5 = \frac{1}{4}s^3 - 3s^2 - 5 = u(s), \quad \forall s \in [-2, 4].$$

## Propiedades de las integrales indefinidas

1. Sean $f$ una función real definida en el intervalo abierto $]a, b[$ de $\mathbb{R}$; y $F$, $G$ dos primitivas de $f$, esto es,

$$F(x) = k_1 + \int f(x)dx, \quad \forall x \in [a, b].$$
$$G(x) = k_2 + \int f(x)dx, \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces, $F(x) - G(x) = k_1 - k_2 = c$,

lo cual significa que dos primitivas de la función $f$ difieren en una constante.

2. Sean $f$, $g$ dos funciones reales definidas en el intervalo abierto $]a, b[$ de $\mathbb{R}$; y $F$, $G$ dos primitivas de $f$, $g$ respectivamente, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= k_1 + \int f(x)dx, \\ G(x) &= k_2 + \int g(x)dx, \\ F(x) + G(x) &= \int f(x)dx, + \int g(x)dx + k_1 + k_2 \\ &= k + \int (f(x) + g(x))dx, \\ \lambda F(x) &= \lambda\left(k_1 + \int f(x)dx\right) \\ &= \lambda k_1 + \lambda \int f(x)dx \\ &= c + \int \lambda f(x)dx, \end{aligned}$$

donde $k_1$, $k_2$, $k = k_1 + k_2$, y $c = \lambda k_1$ son constantes de integración. En otras palabras, la primitiva de una suma de funciones es la suma de las primitivas de las funciones. Una primitiva del producto de un número real por una función es el número real por la primitiva de la función.

3. Sean $f$ una función real definida en el intervalo $]a, b[$ y $F$ una primitiva de $f$. De la definición de primitiva de $f$ se tiene

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x), \quad \forall x \in ]c, d[.$$

Por otro lado,

$$F(x) = c + \int f(x)dx = c + \int \frac{dF}{dx}(x)dx,$$

con $c \in \mathbb{R}$ como una constante de integración.



**Recuerda que...**

1. La **integral de una suma** de funciones es igual a la **suma de las integrales** de esas funciones.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Una primitiva de una suma de funciones es la suma de las primitivas de las funciones.

2. La **integral del producto de una constante** por una función es igual a la **constante por la integral** de la función.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Una primitiva del producto de un número real por una función es el número real por la primitiva de la función.

DCCD: M.5.1.65. Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.
M.5.1.66. Calcular la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas.
M.5.1.63. Realizar las operaciones de suma y multiplicación de funciones escalonadas y de multiplicación de números reales por funciones escalonadas aplicando las propiedades de los números reales.



**Saberes previos**

¿Qué es la integral?



**Desequilibrio cognitivo**

¿En qué consiste el teorema fundamental del cálculo?

**Recuerda que...**

Aunque el símbolo sumatorio ya fue tratado en unidades anteriores, volvemos a revisar algunos resultados importantes. Supongamos que se tiene $n$ números reales $z_1, \dots z_n$. A la suma $z_1 + z_2 + \dots z_n$ la expresamos en forma abreviada como $\sum_{j=1}^{n} z_j$, que se lee "suma de los $z_j$ con $j$ que varía de 1 a $n$". Es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

Al símbolo $\sum$ se le llama sumatorio; a $z_j$ se le llama término general de la suma; $j$ es el índice de sumación; $j = 1$ y $j = n$ son los límites de sumación (esto es, $j$ varía de 1 hasta $n$).

El índice de sumación se puede representar con cualquier letra minúscula, aunque se prefieren $i, j, k, l$.

# Integral definida. Propiedades

## Propiedades de la sumatoria

Dados $n \in \mathbb{Z}^+$, $v_j, w_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes propiedades.

i) $\sum_{j=1}^{n}(v_j + w_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j + \sum_{j=1}^{n} w_j$.  ii) $\sum_{j=1}^{n}(\alpha\, v_j) = \alpha \sum_{j=1}^{n} v_j$.

iii) $\sum_{j=1}^{n}(v_{j+1} - v_j) = v_n - v_1$.

Las expresiones más usadas en el cálculo de integrales definidas son:

1. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $a \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{n} a = an$. Nota que $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$, calculemos la suma de los $n$ primeros números naturales:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} j = 0 + 1 + 2 + \dots + n.$$

Para $j \in \mathbb{N}$, se tiene $(j + 1)^2 - j^2 = j^2 + 2j + 1 - j^2 = 2j + 1$.

Por la propiedad iii), se obtiene

$$\sum_{j=0}^{n}[(j + 1)^2 - j^2] = (n + 1)^2,$$

y por las propiedades i) y ii), resulta que

$$(n + 1)^2 = \sum_{j=0}^{n}[(j + 1)^2 - j^2] = \sum_{j=0}^{n}(2j + 1) = 2\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1 = 2\sum_{j=0}^{n} j + n + 1,$$

de donde,

$$2\sum_{j=0}^{n} j = (n+1)^2 - n - 1 = n(n+1),$$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} j = 0 + 1 + 2 + \dots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Calculemos la suma de los cuadrados de los $n$ primeros números naturales:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Para $j \in \mathbb{N}$ se tiene $(j + 1)^3 - j^3 = j^3 + 3j^2 + 3j + 1 - j^3 = 3j^2 + 3j + 1$.

Por la propiedad iii), resulta que

$$\sum_{j=0}^{n}[(j + 1)^3 - j^3] = (n + 1)^3,$$

y por las propiedades i) y ii), resulta que

$$(n + 1)^3 = \sum_{j=0}^{n}[(j + 1)^3 - j^3] = \sum_{j=0}^{n}(3j^2 + 3j + 1)$$

$$= 3\sum_{j=0}^{n} j^2 + 3\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1 = 3\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{3}{2}n(n + 1) + n,$$

de donde

$$3\sum_{j=0}^{n} j^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - n = n(n+1),$$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2;$$

$$= \frac{n(n+1)(1+2n)}{6}.$$

**Definición.** Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de, $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Una partición del intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos es un conjunto de puntos que se nota $\tau(n)$ y se define como

$$\tau(n) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

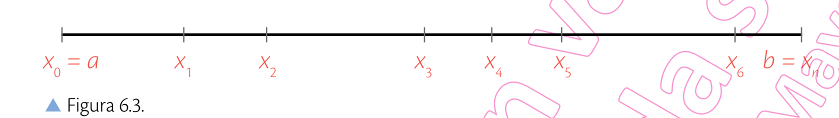
donde

$$x_0 = a < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b.$$

Al conjunto $\tau(n)$ se le llama subdivisión del intervalo $[a, b]$. Escribiremos también

$$\tau(n) = \{x_j \in [a, b] \mid x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

En la Figura 6.3. se muestra una partición $\tau(n)$ del intervalo $[a, b]$.




▲ Figura 6.3.

Los $n$ subintervalos son $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$,

que abreviadamente escribimos $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, lo cual se lee "intervalo cerrado $[x_{j-1}, x_j]$ con $j$ que varía de 1 a $n$". El intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ se llama j-ésimo intervalo de $[a, b]$. Las longitudes de cada uno de los intervalos son

$$h_1 = x_1 - x_0,\ h_2 = x_2 - x_1, \ldots,\ h_n = x_n - x_{n-1},$$

que abreviadamente escribimos $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, que se lee "$h_j = x_j - x_{j-1}$ con $j$ que varía de 1 a $n$". Se tiene entonces:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n] = [x_{j-1} - x_j] = \bigcup_{j=1}^{n} [x_{j-1} - x_j].$$

Notemos que los extremos del intervalo $[a, b]$ pertenecen a $\tau(n)$, esto es, $a, b \in \tau(n)$. Además, $\tau(n)$ tiene exactamente $n + 1$ puntos distintos del intervalo $[a, b]$.

Se llama partición uniforme $\tau(n)$ a la partición de $[a, b]$ dada como

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \text{ donde } h = \frac{b-a}{n}.$$

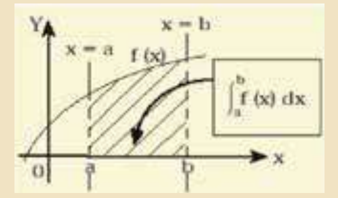
Esta es la partición que utilizamos más adelante.



**Recuerda que...**

La integral definida cumple las siguientes **propiedades**:

- Toda integral extendida a un intervalo de un solo punto, $[a, a]$, es igual a cero.
- Cuando la función $f(x)$ es mayor que cero, su integral es positiva; si la función es menor que cero, su integral es negativa.
- Al permutar los límites de una integral, esta cambia de signo.
- Dados tres puntos tales que $a < b < c$, entonces se cumple la integración a trozos: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$
- Para todo punto $x$ del intervalo $[a, b]$ al que se aplican dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $f(x) \leq g(x)$, se verifica que: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$




▲ Ilustración gráfica del concepto de integral definida.

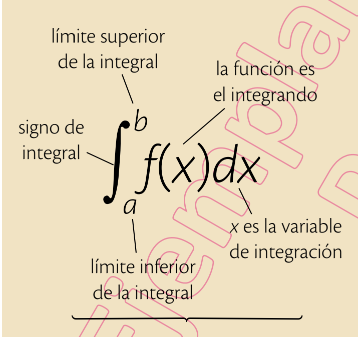
Adaptado de: http://www.hiru.eus/matematicas/la-integral-definida

**Recuerda que...**

Es natural preguntarse si el símbolo de la integral definida tiene relación con la integral indefinida o primitiva, pues observamos que representan cosas *totalmente diferentes*. En efecto, la integral indefinida representa una familia de funciones y la integral definida representa un número.

**Simbología matemática**

- El símbolo $\int$ tiene la forma de la letra *S* mayúscula estirada y denota o indica suma; el símbolo $\int_a^b f(x)dx$ se lee "integral de $f(x)$ de $x = a$ hasta $x = b$" o también, "integral de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$".
- En la integral definida se debe observar los siguientes elementos:




Se lee: "integral de *f* desde *a* hasta *b*".

**Definición.** Sean $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y $v$ una función de $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Se dice que $v$ es escalonada o constante a trozos en $[a, b]$ si y solo si existe una partición $\tau(n)$ de $[a, b]$, tal que

$$v(x) = c_j,\ x \in ]x_{j-1}, x_j],\ j = 1, \ldots, n,$$

y $v(x_j)$ está definido para cada $j = 0, 1, \ldots, n$. La partición $\tau(n)$ se llama partición asociada con la función $v$.

En la definición de función escalonada, observemos que la función $v$ toma el valor constante $c_j$ en el j-ésimo intervalo abierto $]x_{j-1}, x_j]$, $v(x_{j-1})$, y que $v(x_j)$ no necesariamente tiene que tomar el valor $c_j$.

El dominio de la función $v$ es el intervalo $[a, b]$, $Dom(v) = [a, b]$, y el recorrido de $v$ es el conjunto:

$$Rec(v) = \{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{v(x_j) \mid j = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Se denota con $\varepsilon([a, b])$ el conjunto de todas las funciones escalonadas en $[a, b]$. Las funciones nula 0 y unidad $\mathbb{1}$ son escalonadas y están definidas como:

$$\begin{cases} 0(x) = 0, & \forall x \in [a, b], \\ \mathbb{1}(x) = 1, & \forall x \in [a, b]. \end{cases}$$

Luego, $0, \mathbb{1} \in \varepsilon([a, b])$. La igualdad de funciones escalonadas se define en la forma habitual, esto es, $f, g \in \varepsilon([a, b])$,

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

En el conjunto de funciones escalonadas $\varepsilon([a, b])$ se definen tres operaciones: adición "+", producto de escalares por funciones escalonadas "·", y producto de funciones escalonadas "×". Sean $f, g \in \varepsilon([a, b])$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen las funciones escalonadas $f + g$, $\lambda f$, y $fg$, en la forma habitual. Así:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in [a, b], \forall \lambda \in \mathbb{R},$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

**Definición.** Sean $f \in \varepsilon([a, b])$ y $\tau(n)$ una subdivisión compatible con $f$, esto es,

$$\tau(n) = \{x_j \in [a, b] \mid x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\},$$
$$f(x) = c_j, x \in ]x_{j-1}, x_j], j = 1, \ldots, n.$$

La integral definida de $f$ sobre $[a, b]$ se nota $\int_a^b f(x)dx$, o, en forma abreviada, $\int_a^b f$, y se define como el número real:

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{n} c_j h_j, \ \ h_j = x_j - x_{j-1} \ \ \text{para } j = 1, \ldots, n.$$

La suma

$$c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_nh_n$$

se expresa como $\sum_{j=1}^{n} c_jh_j$ o también como

$\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1})$, que se lee "suma de $j = 1$ hasta $n$ de $c_jh_j$" o "de $c_j(x_j - x_{j-1})$". Así,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} c_1h_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}) = c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_nh_n =$$
$$c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_2 - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_{n-1}).$$

Notemos que el cálculo de $\int_a^b f$ se reduce a calcular la suma $c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_nh_n$ que requiere únicamente de los elementos básicos de suma y multiplicación de números reales.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$ y $f$ la función real definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. En el cálculo de integrales definidas de funciones escalonadas se introdujo el símbolo $\int_a^b p(x)dx$ que se lee "integral definida desde $a$ hasta $b$ de la función escalonada $p$".

**Definición**

i) Se dice que $(p_n)$ es una sucesión de funciones escalonadas definidas en $[a, b]$, si y solo si para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $p_n$ es una función escalonada en $[a, b]$. Esto es, $p_n \in \varepsilon([a, b])$.

ii) Sea $f$ una función real definida en $[a, b]$. Se dice que la sucesión de funciones escalonadas $(p_n)$ converge a $f$, si y solo si se verifica

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$.

El símbolo $\int_a^b p(x)dx$ se lee "integral definida desde $a$ hasta $b$ de la función real dada como $f(x)$ por $dx$". La integral de funciones reales que se definen a continuación se conoce en la literatura como **integral de Riemann**. Para facilitar la comprensión, la siguiente definición de integral definida es una simplificación de la definición de integral de Riemann a una clase de funciones continuas $f$.

**Definición.** Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que $f$ es

integrable en $[a, b]$, que se escribe $\int_a^b f(x)dx$, si y solo si existe una sucesión de funciones escalonadas $(p_n)$ definidas en $[a, b]$, tales que

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b], \\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b p_n(x) \text{ existe.} \end{cases}$$

En tal caso, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b p_n(x)$.



**Recuerda que...**

**Primer teorema fundamental del cálculo integral**

Si $f$ es una función continua en $[a, b]$, entonces la función $F$ definida por

$F(x) = \int_a^b f(t)dt$ es continua en $[a, b]$ y satisface que $F'(x) = f(x)$.

**Segundo teorema fundamental del cálculo integral**

Si $f$ es una función continua en $[a, b]$, entonces

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,

donde $F$ es cualquier primitiva de $f$ en el intervalo $[a, b]$.

**Glosario**

escalonada. Semejante en la superficie a una serie de escalones.



**Recuerda que...**

La integral definida cumple las siguientes propiedades:

1. Si $a > b$, entonces
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
2. Si $f(a)$ existe, entonces
$\int_a^a f(x)dx = 0.$
3. Si $k$ es una constante cualquiera, entonces
$\int_a^b k\,dx = k(b - a).$
4. Si la función $f$ es integrable en $[a, b]$ y $k$ es una constante arbitraria, entonces
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
5. Si las funciones $f$ y $g$ son integrables en $[a, b]$, entonces $f \pm g$ también es integrable en $[a, b]$ y
$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] =$
$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

## Propiedades de las integrales definidas

1. Sean $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, y $F$ una primitiva de $f$, esto es,

$$F(x) = k + \int f(x)dx, \quad \forall x \in [a, b].$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2. Sean $f$, $g$ dos funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, $F$, $G$ dos primitivas de $f$, $g$ respectivamente, y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces,

$$F(x) = k_1 + \int f(x)dx,$$
$$G(x) = k_2 + \int g(x)dx,$$
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$= (F(x) + G(x))\,\Big|_a^b$$
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx = \lambda\left(F(x)\,\Big|_a^b\right),$$

donde $k_1$, $k_2$ son constantes de integración. En otras palabras, la integral definida de una suma de funciones es la suma de las integrales definidas. La integral definida del producto de un número real por una función es el número real por la integral definida de la función.

3. Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \forall c \in \,]a, b[.$$

4. Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$, y $F$ una primitiva de $f$. Se supone que
$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$

Entonces, $\int_a^b f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b \geq 0.$

5. Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$. Se supone que
$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$

Entonces, $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx, \quad \forall [c, d] \subset [a, b].$

6. Sean $f$, $g$ dos funciones reales definidas en el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Se supone que

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

y entonces, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

7. Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$, entonces,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

*Ejercicios resueltos*

Aplica las propiedades de las **integrales**.

1. $\int_2^{-1} 3x(x-4)dx = -\int_{-1}^{2} 3x(x-4)dx = -\int_{-1}^{2}(3x^2 - 12x)dx.$
2. $\int_4^4 5x^2dx = \int_4^4 5x^2dx = 0.$
3. $\int_{-2}^{2}\sqrt{5}\, dx = \sqrt{5}\,(2-(-2)) = \sqrt{5}\,(2+2) = 4\sqrt{5}.$
4. $\int_{-1}^{2}(2x^2 - 4x + 5)dx = \int_{-1}^{2} 2x^2dx - \int_{-1}^{2} 4xdx + \int_{-1}^{2} 5dx.$

*Ejercicios resueltos*

1. Calcula la integral definida que se propone, y verifícala con el resultado indicado.

a. $\int_{-2}^{3}\left(-\frac{20}{3}\right)dx = -\frac{100}{3}.$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\int_{-2}^{3}\left(-\frac{20}{3}\right)dx = -\frac{20}{3}x\,\Big|_{-2}^{3} = -\frac{20}{3}(3) - \frac{20}{3}(-2) = -\frac{100}{3}.$$

b. $\int_1^5 6xdx = 72.$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\int_1^5 6xdx = \frac{6x^2}{2}\,\Big|_1^5 = 3(5)^2 - 3(1)^2 = 72.$$

c. $\int_1^5 (6x - 0{,}5)dx = 61{,}5 \quad F(x) = cx + k, \quad \forall x \in [0, b].$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\int_1^5 (6x - 0{,}5)dx = (3x^2 - 0{,}5x)\Big|_2^5 = [3(5)^2 - 0{,}5(5)] - [3(2)^2 - 0{,}5(2)] = 61{,}5.$$

d. $\int_4^6 (4x - x^2)dx; = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_4^6 = (64 - 72) - \frac{32}{3} = -\frac{56}{3}.$

e. $\int_{-2}^{2}(3 + 2x^2 + 5x^4)dx = 2\int_0^2 (3 + 2x^2 + 5x^4)dx = \frac{130}{3}.$

f. $\int_{-2}^{2}(5x - 2x^3)dx = 0.$



**Recuerda que...**

El primer y el segundo teorema del cálculo integral permiten encontrar la integral y definida de ciertas funciones a partir de ciertas reglas como las siguientes:

$\int kdx = kx + C.$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

$\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C.$

$\int e^x dx = e^x + C.$

$\int sen(x)dx = -cos(x) + C.$

$\int cos(x)dx = sen(x) + C.$

**Glosario**

**integral.** Parte de las matemáticas que trata de obtener una función a partir de su derivada.

# Taller práctico

DCCD: M.5.1.64. Calcular la integral definida de una función escalonada, identificar sus propiedades cuando los límites de integración son iguales y cuando se intercambian los límites de integración.
M.5.1.67. Reconocer la derivación y la integración como procesos inversos.
M.5.1.65. Aplicar la interpretación geométrica de la integral de una función escalonada no negativa como la superficie limitada por la curva y el eje x.
M.5.1.66. Calcular la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4, aproximando el cálculo como una sucesión de funciones escalonadas.



**1** **Verifica** la siguiente solución:

La integral indefinida de la función afín $f$ definida como

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in [c, d]$$

es la función $P$ definida como

$$P(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + k, \quad \forall x \in [c, d],$$

donde $k \in \mathbb{R}$ constante. Inmediatamente se puede verificar que

$$\frac{dP}{dx}(x) = ax + b = f(x), \quad \forall x \in \,]c, d[.$$

Así, la integral indefinida de $f$ se obtiene como

$$\int f(x)dx = \int (ax + b)dx = \frac{1}{2}ax^2 + bx + k, \; \forall x \in [c, d].$$

Por ejemplo, $f(t) = 6t - \frac{1}{2}$, $\forall t \in \,]0, 4[$.
Entonces,

$$\int f(t)dt = \int \left(6t - \frac{1}{2}\right)dt = 3t^2 - \frac{1}{2}t + c, \; \forall t \in [0, 4],$$

con $c \in \mathbb{R}$. Toda primitiva $P$ de $f$ tiene la forma

$$P(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t + c, \quad \forall t \in [0, 4],$$

ya que $\frac{dP}{dx}(t) = 6t - \frac{1}{2}, \quad \forall t \in \,]0, 4[$.

Una de estas primitivas $P$ de $f$ satisface la condición $P(0) = 10$, entonces, la primitiva $P$ de $f$ está definida como

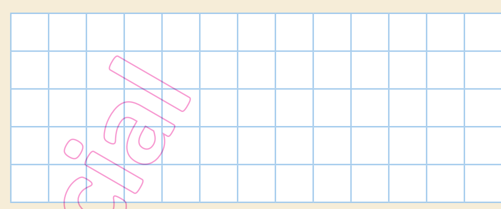
$$P(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t + 10, \quad \forall t \in [0, 4],$$

pues

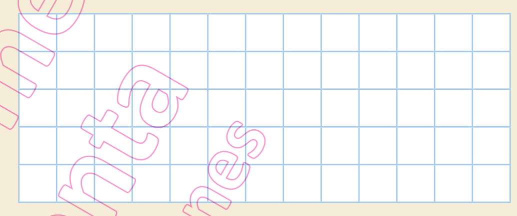
$$\frac{dP}{dx}(t) = 6t - \frac{1}{2} = f(t), \quad \forall t \in \,]0, 4[.$$

**2** En cada ítem se propone una función real $f$. **Encuentra** la integral indefinida de $f$ y **comprueba** que $\frac{dP}{dx}(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

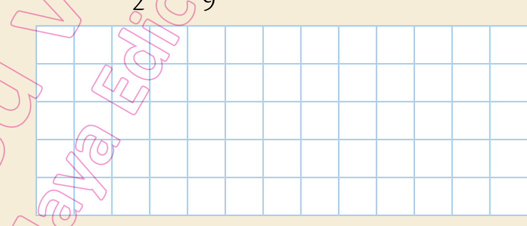
a) $f(x) = -\frac{20}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



b) $f(x) = \frac{1}{2}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$



c) $f(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{4}{9}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

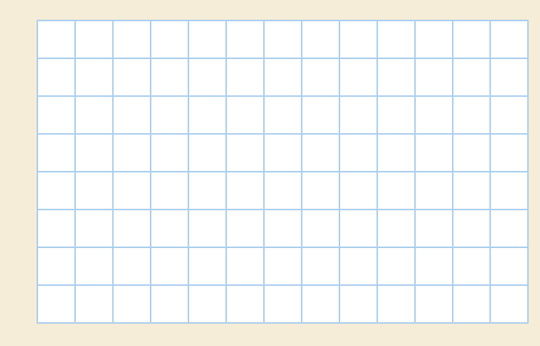


**3** **Halla** una función $u$ que satisfaga la condición que se indica, y que sea integral indefinida de la función $f$ que se define en cada caso. **Calcula** $\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$, y **comprueba** que este límite es $f(x)$.

a) $f(x) = 2x + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u(0) = 0.$

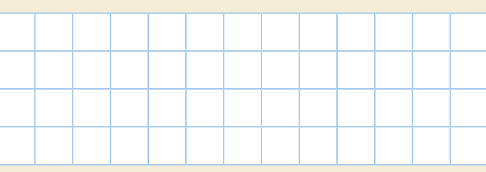
b) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad u(0) = -1.$

c) $f(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{4}{9}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

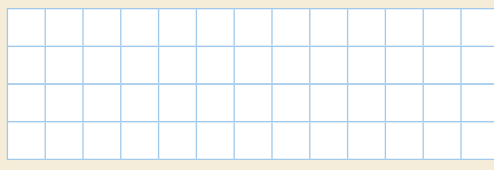


**4** **Calcula** la integral definida que se propone y **verifica** con el resultado indicado.

a) $\int_{0,5}^{1,5}\left(-\frac{5}{2}x-\frac{4}{9}\right)dx=-\frac{53}{18}.$



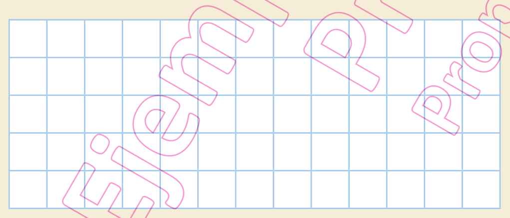
b) $\int_{-1}^{1}(10x^2+11)dx=\frac{86}{3}.$



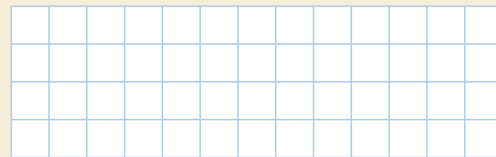
c) $\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+x+1)dx=\frac{7}{12}.$

**5** En cada ítem, **aplica** propiedades de la integral definida para calcular la integral dada, y **verifica** su resultado con el dado.

a) $\int_{-2}^{3}(2x+3)dx=20.$



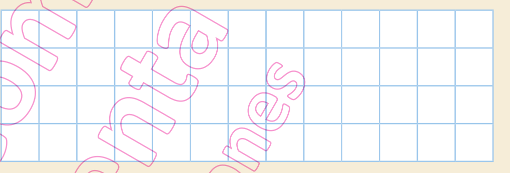
b) $\int_{0}^{3}\left(3x^2-\frac{1}{4}x-1\right)dx=\frac{183}{8}.$



c) $\int_{-2}^{0}\left(-\frac{5}{8}x^3+3x-5\right)dx=-\frac{27}{2}.$

**6** Sean $a>0, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\in\mathbb{R}$ no nulos. **Demuestra** que:

a) $\int_{-a}^{a}(b_1x+b_3x^3)dx=0.$



b) $\int_{-a}^{a}(b_0+b_2x^2+b_4x^4)dx=2\left(b_0a+\frac{b_2}{3}a^3+\frac{b_4}{5}a^5\right).$

## Trabajo colaborativo

**Diversidad funcional en el aula**

Debemos recordar que todos merecemos buen trato y respeto, por lo tanto si tenemos un compañero con discapacidad debemos cuidar de las palabras que decimos para no herir a las personas.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** **Dada** la función $f$ definida como

$f(x)=\frac{1}{16}x^3+x+5,\quad \forall x\in[1,8].$

a) **Apliquen** las propiedades de las integrales para calcular y verificar el resultado

$\int_{1}^{8}f(x)dx=136-\frac{353}{64}.$

b) **Comprueben** que

$136-\frac{353}{64}=\int_{1}^{4}f(x)dx<\int_{1}^{8}f(x)dx.$

DCCD: M.5.1.68. Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 (primitiva).
M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.



**Saberes previos**

¿Qué noción tienes de área?



**Desequilibrio cognitivo**

¿Cómo puedes calcular el volumen de un sólido con la aplicación de integrales?

# Cálculo de áreas de regiones planas. Integrales de funciones polinomiales

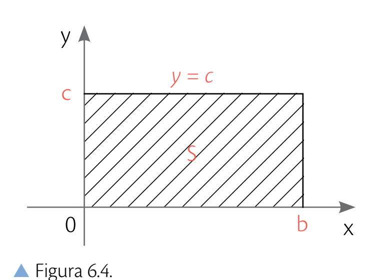
Sea $b \in \mathbb{R}^+$. En lo que sigue, las funciones reales que consideremos están definidas en el intervalo $[0, b]$.

i) Área de una región rectangular. Sean $b > 0$, $c > 0$,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c\}.$$

En la Figura 6.4. se muestran el intervalo $[0, b]$, el segmento de recta de ecuación cartesiana $y = c$, así como la región rectangular $S$.

El número real positivo $b$ es la base y el número real positivo $c$ es la altura, de la geometría elemental, se sabe que área de $S$ = *base* x *altura*.




▲ Figura 6.4.

Escribimos $A(S) = bc$. Sea $f$ la función real definida como $f(x) = c, \quad \forall x \in 0, b]$. Resulta que $f$ es una función escalonada,

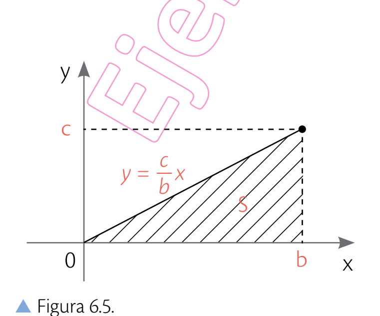
$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \quad \forall x \in 0, b], \\ \int_0^b cdx = bc. \end{cases}$$

Se escribe $\int_0^b cdx = cx \mid_0^b = cb$, es decir, $a(S) = bc = \int_0^b cdx$.

$F(x) = cx + k, \quad \forall x \in [0, b]$, es la integral indefinida o primitiva de $f$.
Entonces, $F(b) - F(0) = cb + k - (c \times 0 + k) = bc = cx \mid_0^b$.

ii) Integral definida de una función lineal restringida a $[0, b]$.
Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ con $\beta > 0$. La función definida como $f(x) = \beta x, \quad \forall x \in [0, b]$ se llama función lineal restringida al intervalo $[0, b]$. Consideramos $c \in \mathbb{R}^+$ $\beta = \frac{c}{b}$, y el conjunto

$$S = \left\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{c}{b}x, \quad \forall x \in [0, b]\right\}.$$




▲ Figura 6.5.

Como $b > 0$, $c > 0$ y $x \in [0, b]$, resulta que $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, b]$.
En la Figura 6.5. se muestran el intervalo $[0, b]$, el segmento de recta de ecuación cartesiana $y = \frac{c}{b}x$, así como la región triangular $S$.

Al número real positivo $b$ se le llama base del triángulo rectángulo y al número real positivo $c$ se le llama altura del triángulo, de modo que el área de la región triangular es $\frac{1}{2}bc$, lo cual se escribe $a(S) = \frac{1}{2}bc$.

Calculemos la **integral de Riemann** de $f$.

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $h = \frac{b}{n}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Se define la sucesión de funciones escalonadas $(p_n)$ como sigue:
$p_n(x) = f(x_{j-1}) = \beta x_{j-1} = \beta(j - 1)h, j = 1, \ldots, n$.

**Glosario**

**recorrido.** Espacio que ha recorrido, recorre o ha de recorrer alguien o algo.

**sucesión.** Conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada.

Aplicando la definición integral definida de una función escalonada, y la suma de los $n - 1$ primeros números naturales, se tiene:

$$\int_0^b p_n(x)dx = \sum_{j=1}^{n} (\beta(j-1)h)h = \beta h^2 \sum_{i=1}^{n} (j-1)$$

$$= \beta h^2 \frac{n(n-1)}{2} = \beta\left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{n(n-1)}{2} = \beta \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Para $n$ suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ es suficientemente pequeño. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b p_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \beta \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \beta \frac{b^2}{2}.$$

Puesto que el límite existe, la integral definida de $f$ es

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b \beta x dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^b p_n(x)dx = \beta \frac{b^2}{2}.$$

Escribimos $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b \beta x dx = \beta \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \beta \frac{b^2}{2}$.

A la integral indefinida de la función $f$ la designamos con $F(x) = \frac{\beta}{2}x^2 + k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, siendo $k \in \mathbb{R}$. Resulta entonces que

$$F(b) - F(0) = \frac{\beta}{2} b^2 + k - \left(\frac{\beta}{2} \times 0^2 + k\right) = \beta \frac{b^2}{2} = \beta \frac{x^2}{2}\Big|_0^b.$$

**Conclusión**

$$a(S) = \frac{1}{2} bc = \int_0^b f(x)dx = \int_0^b \frac{c}{b} x dx = \frac{c}{b} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b.$$

Si $f(t) = 6t - \frac{1}{2}$, $t \in [0, 4]$, obtenemos

$$F(x) - F(c) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(6t - \frac{1}{2}\right)dt = 3x^2 - \frac{1}{2}x - \left(3c^2 - \frac{1}{2}\right)c,$$

$x, c \in [0, 4]$.

Nota que $\frac{dF}{dx}(x) = 6x - \frac{1}{2} = f(x), \quad x \in [0, 4]$.

Particularmente, si $c = 0, x = 1$, tenemos

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \left(6t - \frac{1}{2}\right)dt = 3 \times 1^2 - \frac{1}{2} \times 1 - \left(3 \times 0^2 - \frac{1}{2} \times 0\right) = \frac{5}{2}.$$

iii) Integral definida de una función cuadrática restringida a $[0, b]$. Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ con $\beta > 0$. Consideramos la función definida como $f(x) = \beta x^2, \quad \forall x \in [0, b]$

Nos proponemos calcular la **integral de Riemann** de $f$, esto es, $\int_0^b \beta x^2 dx$. Para el efecto, sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $h = \frac{b}{n}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Se define la sucesión de funciones escalonadas $(p_n)$ como sigue:

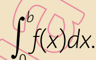
$$p_n(x) = f(x_{j-1}) = \beta x_{j-1}^2 = \beta(j-1)^2 h^2, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Entonces, aplicando la definición integral definida de una función escalonada, y la suma de los cuadrados de los $n - 1$ primeros números naturales, se tiene:



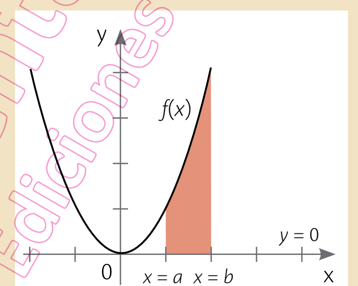
**Recuerda que...**

La integral definida nos sirve para calcular el área bajo una curva



$\int_0^b f(x)dx$.

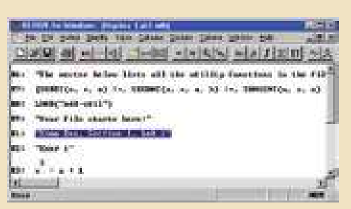
La integral definida de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ representa el área de la región del plano correspondiente entre la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas $y = 0$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.






**Conexiones con las TIC**

Existen muchos *softwares* libres que permiten obtener cálculos matemáticos, como, por ejemplo, el cálculo de la integral definida. El programa *DERIVE for Windows* permite realizar cálculos y manipulaciones matemáticas de carácter general.





**Recuerda que...**

Con respecto al cálculo de áreas, sabemos que el cálculo de algunas de ellas es sencillo (por ejemplo, cuando en geometría nos referimos al cálculo de cuadrados, rectángulos, triángulos, círculos, etc). Otras áreas son más complejas, y se dividen en un número finito de triángulos.

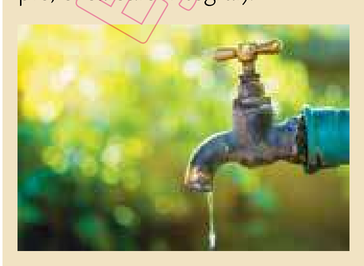
Los antiguos griegos fueron capaces de encontrar fórmulas para calcular áreas de regiones (principalmente limitadas por cónicas) mediante el método de "exhaución" (Arquímedes, 287-212 a. C.). En esencia, se trata de un proceso al límite, donde la región en estudio queda encajada entre dos polígonos, uno inscrito y el otro circunscrito, cuyas áreas respectivas se pueden calcular (no muy fácilmente, valga decirlo).



**Eje transversal**

**Salud**

El agua necesita ser tratada para el consumo humano. El tratamiento se hace en instalaciones centralizadas que necesitan controlar flujos de agua, volúmen y tiempo de circulación. Estos cálculos se llevan a cabo por medio de la matemática y de sus herramientas (por ejemplo, el cálculo integral).



Shutterstock, (2020). 373973119

▲ Agua potable.

$$\int_0^b p_n(x)dx = \sum_{j=1}^{n}(\beta(j-1)^2h^2)\ h = \beta h^3 \sum_{j=1}^{n}(j-1)^2$$

$$= \beta h^3 \frac{(n-1)n(1+2(n-1))}{6} = \beta\left(\frac{b}{3}\right)^3 \frac{(n-1)n(2n-1))}{6}$$

$$= \beta\frac{b^3}{3}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right).$$

Para $n$ suficientemente grande, $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{2n}$ son suficientemente pequeños. Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^b p_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\beta\frac{b^3}{3}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) = \beta\frac{b^3}{3}.$$

La integral definida de $f$ viene dada como

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b \beta x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^b p_n(x)dx = \beta\frac{b^3}{3}.$$

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b \beta x^2 dx = \beta\frac{x^3}{3}\Big|_0^b = \frac{\beta}{3}b^3.$$

Por otro lado, a la integral indefinida de la función $f$ la designamos con $F(x) = \frac{\beta}{3}x^3 + k,\quad \forall x \in \mathbb{R}$, siendo $k \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$F(b) - F(0) = \frac{\beta}{3}b^3 + k - \left(\frac{\beta}{3}\times 0^3 + k\right) = \frac{\beta}{3}b^3 = \frac{\beta}{3}x^3\Big|_0^b.$$

**Conclusión**

$\int_0^b \beta x^2 dx = \frac{\beta}{3}x^3\Big|_0^b = \frac{\beta}{3}b^3$. De manera general, se prueba que

$$\int_0^b \beta x^m dx = \frac{\beta}{m+1}x^{m+1}\Big|_0^b = \frac{\beta}{m+1}b^{m+1}.$$

## Otra propiedad de las integrales definidas

Sea $f$ una función real definida en el intervalo $[a, b]$. Se supone que $f(x) \geq 0,\quad \forall x \in [a, b]$,

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x),\quad a \leq x \leq b\},$$

y que $F$ es una primitiva de $f$. Entonces, el área de la región $S$ es

$$a(S) = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

## Integrales definidas de funciones polinomiales

Los resultados obtenidos en la sección precedente se extienden a cualquier intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $f$ una función real definida en el intervalo $]a, b[$ y $P$ una primitiva de $f$. De la definición de primitiva de $f$, se tiene

$$\frac{dP}{dx}(x) = f(x),\quad \forall x \in\ ]a, b[.$$

Por otro lado, $P(x) = k + \int f(x)dx = k + \int \frac{dP}{dx}(x)dx.$

Escribimos $P(x) = P(a) + \int_a^x f(t)dt,\quad \forall x \in a, b].$

1. La integral indefinida de la función $f$ definida como $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [c, d]$, es la función $P$ dada como

$$P(x) = \int (ax + b)dx = \int axdx + \int bdx = \frac{1}{2}ax^2 + bx + k, \ \forall x \in [c, d],$$

donde $k \in \mathbb{R}$ constante. Entonces,

$$P(c) = \frac{1}{2}ac^2 + bc + k, \quad P(d) = \frac{1}{2}ad^2 + bc + k,$$

$$\int_c^d f(x)dx = P(d) - P(c) = \frac{1}{2}ad^2 + bd + k - \left(\frac{1}{2}ac^2 + bc + k\right)$$

$$= \frac{1}{2}a(d^2 - c^2) + b(d - c).$$

Este resultado se obtiene de modo similar a los tratados en la sección precedente, esto es, sea $n \in \mathbb{Z}^+$, $h = \dfrac{d-c}{n}$, $x_j = c + jh, j = 0, 1, \ldots$ n.

Se define la sucesión de funciones escalonadas $(p_n)$ como sigue: $p_n(x) = f(x_{j-1}) = ax_{j-1} + b, \quad j = 1, \ldots, n.$

Entonces,

$$\int_c^d f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_c^d p_n(x) = \frac{1}{2}a(d^2 - c^2) + b(d - c).$$

2. **Cálculo del área de una región limitada superiormente por una porción de parábola.**

Sea $f$ la función definida por

$f(x) = \dfrac{1}{4}(x - 1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}$, $f$ es un polinomio de grado 2.

Consideremos la región $S$ como el conjunto definido por $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), \ -2 \leq x \leq 3\}$. Ver Figura 6.6.

Calculemos el área de la región $S$. En primer lugar, una primitiva $P$ de la función $f$ está definida por

$$P(x) = \int \left(\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1\right) dx = \frac{1}{12}(x - 1)^3 + x + k, \ \forall x \in [-2, 3],$$

$k \in \mathbb{R}$ constante. Luego,

$P(-2) = \dfrac{1}{12}(-2 - 1)^3 - 2 + k = -\dfrac{7}{14} + k,$

$P(3) = \dfrac{1}{12}(3 - 1)^3 + 3 + k = \dfrac{11}{3} + k$, y de la definición de función primitiva se tiene

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = P(3) - P(-2) = \frac{11}{3} + k - \left[-\frac{17}{4} + k\right] = \frac{95}{12},$$

con lo que $a(S) = \dfrac{95}{12}$.

**@ Conexiones con las TIC**

Para profundizar sobre el estudio de la integral definida, puedes **visitar** la siguiente página:

*bit.ly/2ZJCeMO*

Nota que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [-2, 3]$. En la Figura 6.6 se muestra la gráfica de la porción de parábola definida por la función $f$ y la región $S$.

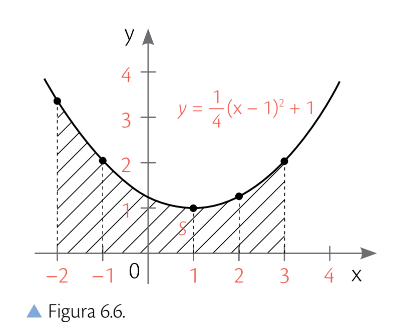



Figura 6.6.

**Glosario**

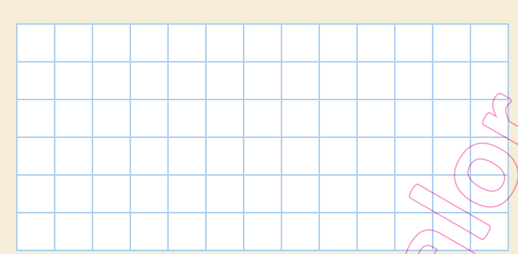
**indefinida.** Que no tiene término señalado o conocido.

**primitiva.** Primero en su línea, o que no tiene ni toma origen de otra cosa.

DCCD: M.5.1.68. Aplicar el segundo teorema del cálculo diferencial e integral para el cálculo de la integral definida de una función polinomial de grado ≤ 4 (primitiva).
M.5.1.69. Resolver y plantear aplicaciones geométricas (cálculo de áreas) y físicas (velocidad media, espacio recorrido) de la integral definida, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas.

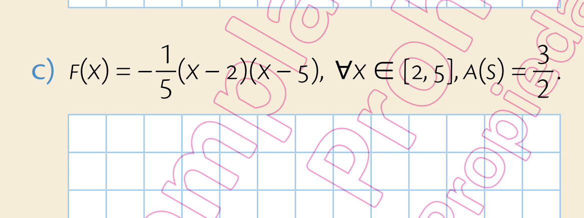
**1** **Considera** la región $S$ definida como $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x < b\}$, donde $f$ es la función que se especifica en cada ítem. **Representa** la región $S$ y **calcula** el área $a(S)$. **Verifica** tu solución con la dada.

a) $f(x) = 2x, \quad \forall x \in [1, 3], \quad a(s) = 8.$



b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2, \quad \forall x \in [0, 2], \quad a(s) = \frac{2}{3}.$

c) $F(x) = -\frac{1}{5}(x-2)(x-5), \ \forall x \in [2, 5], A(s) = \frac{3}{2}.$



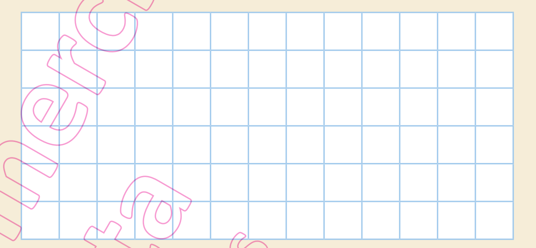
**2** Sean $c_1, c_2, d \in \mathbb{R}$, tales que $0 < c_1 < c_2$, $d > 0$, y $S = S_1 \cup S_2$, donde

$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq c_1, 0 \leq y \leq d\}$,

$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c_1 < x < c_2,$
$0 \leq y \leq -\frac{d}{c_2 - c_1}(x - c_2)\}$.

a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** las regiones $S_1$ y $S_2$.

b) **Calcula** el área de la región $S$, y **prueba** que $a(S) = a(S_1 \cup S_2) = a(S_1) + a(S_2) = c_1 d + \frac{1}{2}(c_2 - c_1)d = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)d.$



**3** Sean $a_1, a_2, b, b_1 \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a_1 < a_2$, $0 < b_1 < b$, y $S_1$, $S_2$ los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que a continuación se definen:

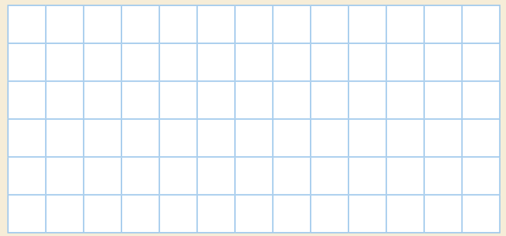
$S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq b + \frac{b - b_1}{a_1}(x - a_1)\right\}$,

$S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x \leq a_2, 0 \leq y \leq b + \frac{2b - b_1}{2(a_1 - a_2)}(x - a_1)\right\}$.

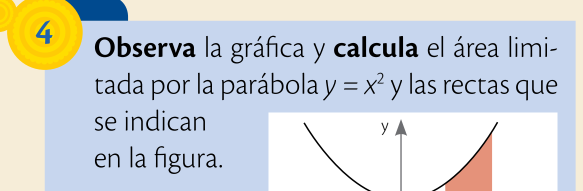
a) En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** las regiones $S_1$ y $S_2$.

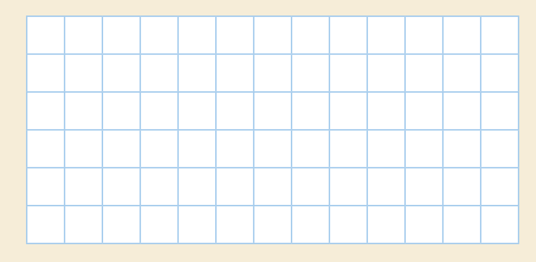
b) **Calcula** el área de la región $S_1 \cup S_2$, y **demuestra** que:

$a(S) = a(S_1 \cup S_2) = a(S_1) + a(S_2) = \frac{1}{2}(b_1 + b)a_2.$

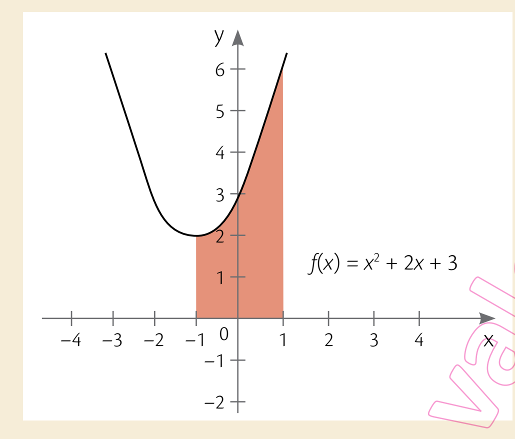


**4** **Observa** la gráfica y **calcula** el área limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas que se indican en la figura.

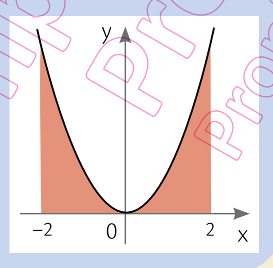


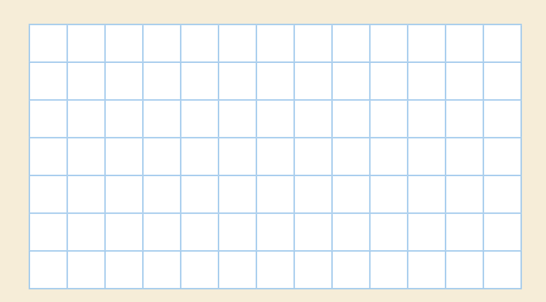


**5** **Calcula** el área de la región que se encuentra sombreada en la figura.




**6** **Halla** el área limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas que se encuentran señaladas en la figura.



## Trabajo colaborativo



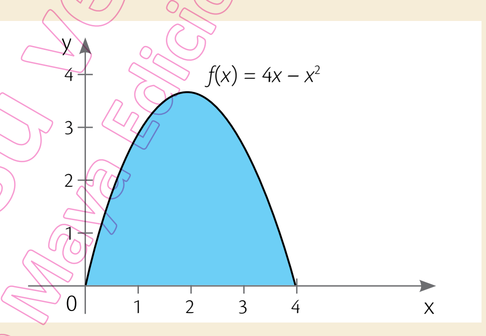
**Diversidad funcional en el aula**

Cada persona tiene capacidades diferentes, lo importante es participar y elogiar los aciertos minimizando los errores.

**Trabajen** en equipo, **indaguen** y **resuelvan**.

**7** **Encuentren** el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = 4x - x^2$ y el eje $x$.

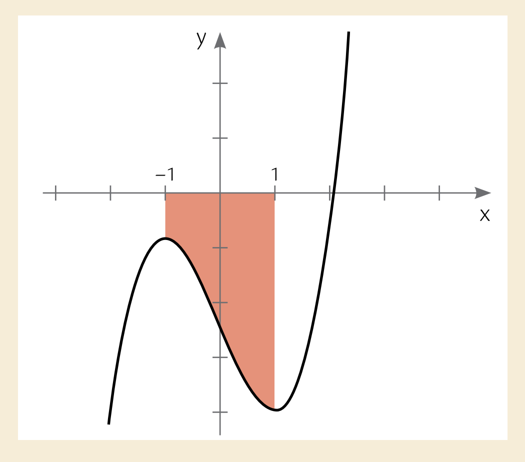
a) **Realicen** el gráfico de la función para hallar el intervalo sobre el eje $x$, del cual deben hacer la integración.




b) **Observen** en el gráfico que la curva corta el eje $x$ en $x = 0$ y en $x = 4$. Luego, estos son los límites de integración.

Área de la región $= \int_0^4 (4x - x^2)dx$.

**8** **Determinen** el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 3x - 3$ y las rectas $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$. **Observen** el gráfico.



# Solución de problemas cotidianos

## Problema. Conexión con física

1. La aceleración $a$ de un vehículo es la función definida en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2] \subset [0, \infty]$. Por definición de la aceleración,

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t), \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

siendo $v$ la función velocidad, entonces la velocidad al instante $t \in [t_1, t_2]$ está definida como

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Por otro lado, la velocidad es la derivada de la función posición, designada como $x(t)$. Así,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(x), \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Entonces, $x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$

Conocidos $x(t_1)$, $v(t_1)$, la velocidad es la integral definida de la aceleración, y la posición es la integral definida de la velocidad en $[t_1, t_2]$.

Un automóvil se mueve con una velocidad constante de $15\frac{m}{s}$ $(54\frac{m}{s})$. Esto significa que recorre quince metros en un segundo. El conductor observa en la vía, delante de él, un auto mal estacionado a una distancia de $d$ metros, lo que le obliga a frenar, así que transcurridos $T$ segundos, debe detenerse. Tenemos $v(0) = 15$, $v(T) = 0$, y la posición $x(0) = 0$. Para esta maniobra, el conductor tiene una infinidad de opciones. Consideremos una de ellas. En dos segundos, reduce la velocidad a la mitad y en tres segundos, se detiene, o sea, $v(2) = 7{,}5\ \frac{m}{s}$, $v(3) = 0\ \frac{m}{s}$, con lo que $Y = 3$ s.

En el proceso de frenado, asumimos que la aceleración es un polinomio cuadrático de la forma

$$a(t) = c_1t^2 + c_2t + c_3, \quad \forall t \in [0, 3],$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ por determinarse. Se tiene

$$v(t) = v(0) + \int_0^t (c_1t^2 + c_2t + c_3)dt|$$

$$= v(0) + \left(\frac{c_1}{3}\tau^3 + \frac{c_2}{2}\tau^2 + c_3\tau\right)\Big|_0^t$$

$$= 15 + \frac{c_1}{3}t^3 + \frac{c_2}{2}t^2 + c_3t, \quad \forall t \in [0, 3].$$

Entonces, $7{,}5 = v(2) = 15 + \frac{c_1}{3} \times 2^3 + \frac{c_2}{2} \times 2^2 + c_3 \times 2.$

Resulta que $16c_1 + 12c_2 + 12c_3 = -45.$

Además, $0 = v(3) = 15 + \frac{c_1}{3} \times 3^3 + \frac{c_2}{2} \times 3^2 + c_3 \times 3,$

con lo cual $6c_1 + 3c_2 + 2c_3 = -10.$

Por otro lado, a la posición del vehículo la denotamos con $x(t)$. Cuando el conductor observa el auto mal estacionado, $x(0) = 0$, entonces,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \left(15 + \frac{c_1}{3}\tau^3 + \frac{c_2}{2}\tau^2 + c_3\tau\right)d\tau$$

$$= \frac{c_1}{12}t^4 + \frac{c_2}{6}t^3 + \frac{c_3}{2}t^2 + 15t, \quad \forall t \in [0, 3].$$

En tres segundos, el conductor debe detenerse y en este tiempo ha recorrido una distancia de $d$ metros. Entonces,

$$d = x(3) = \frac{c_1}{12} \times 3^4 + \frac{c_2}{6} \times 3^3 + \frac{c_3}{2} \times 3^2 + 15 \times 3,$$

de donde $27c_1 + 18c_2 + 18c_3 = 4(d - 45).$

Así, resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 16c_1 + 12c_2 + 12c_3 = -45, \\ 6c_1 + 3c_2 + 2c_3 = -10, \\ 27c_1 + 18c_2 + 18c_3 = 4(d - 45), \end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{cases} c_1 = \frac{4}{3}d - \frac{75}{2}, \\ c_2 = -\frac{40}{9}d + \frac{735}{6}, \\ c_3 = \frac{8}{3}d - \frac{305}{4}. \end{cases}$$

Como tarea se deja hallar esta solución.

Las funciones de posición, velocidad y aceleración están definidas como:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{12}t^4 + \frac{c_2}{6}t^3 + \frac{c_3}{2}t^2 + 15t, \quad \forall t \in [0, 3]. \\ v(t) = \frac{c_1}{3}t^3 + \frac{c_2}{2}t^3 + c_3t + 15t, \quad \forall t \in [0, 3]. \\ a(t) = c_1t^2 + c_2t + c_3, \quad \forall t \in [0, 3]. \end{cases}$$

Si el auto mal estacionado está localizado a una distancia mayor que $d$ metros, no existe colisión; si el auto mal estacionado está localizado a una distancia menor que $d$ metros, existe colisión. Por ejemplo, si $d = 30$ m,

$$c_1 = \frac{5}{2}, c_2 = -\frac{65}{6}, c_3 = \frac{15}{4}.$$

En el primer segundo, el auto ha recorrido $x(1) = 15{,}28$ m, su velocidad es $v(1) = 14{,}17$ m/s, y su aceleración es $a(1) = -4{,}58$ m/s$^2$. Si el conductor no frena en el tiempo $T = 3$ s, el auto habrá recorrido 45 m, lo que significa que en dos segundos se habrá impactado con el auto mal estacionado.

# Matemática y Economía

"El mercado determina el precio al que un producto se vende. El punto de intersección de la curva de la demanda y la curva de la oferta, para un producto, da el precio de equilibrio. En el precio de equilibrio, los consumidores comprarán la misma cantidad del producto que los fabricantes quieren vender. Sin embargo, algunos consumidores aceptarán gastar más en un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas esas personas aceptan pagar se considera como el ahorro de esas personas y se llama el superávit de los consumidores. El área bajo la curva de demanda es la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por $q_0$ artículos. El área sombreada bajo la recta $y = q_0$ muestra la cantidad total que los consumidores realmente gastarán en el precio $p_0$ de equilibrio. El área entre la curva y la recta representa el superávit de los consumidores. El superávit de los consumidores está dado por el área entre las curvas $p = d(q)$ y $p = p_0$. Entonces su valor puede encontrarse con una integral definida de esta forma: $\int_0^{q_0}[d(q) - p_0]d_q$, donde $d_q$ es una función demanda con precio de equilibrio $p_0$ y demanda de equilibrio $q_0$".

"Aplicaciones a la Administración y la Economía" (s. f.).

▲ Curva de demanda.



## La matemática y las profesiones

# Economía

La Economía, Demografía y Administración, entre otras carreras socioeconómicas, se enfocan en el conocimiento sobre integrales para resolver problemas y proyectar acciones sobre producción, administración de bienes, comercio exterior, reparto de ingresos en una empresa o entre una población de un determinado país.

Un aspirante a título de tercer nivel en Economía requiere cursar y aprobar las asignaturas que tratan los temas: recursos naturales, políticas públicas, economía internacional, economía financiera, optimización, entre otras.

Los economistas están involucrados en todas las actividades que se relacionen con el desarrollo económico, social, político y cultural a nivel local, nacional e internacional.



Shutterstock, (2020). 529257325

▲ Informe financiero.

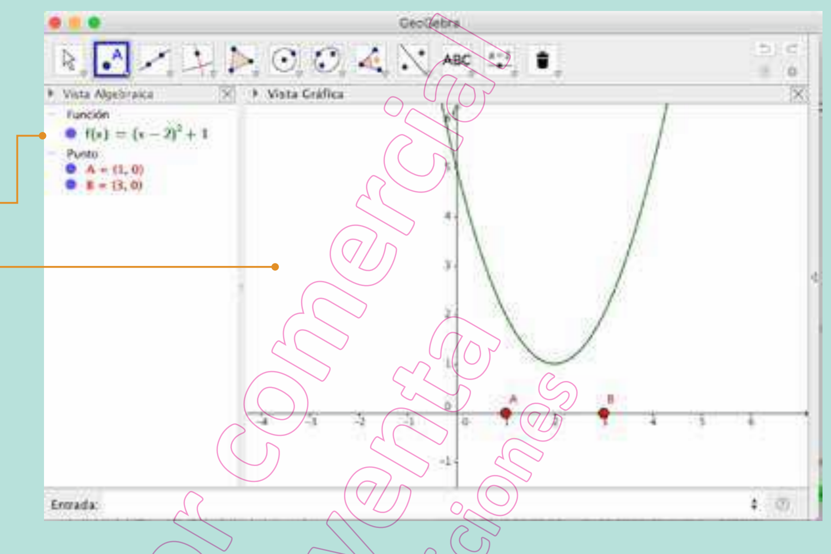
### Duración de la carrera

La carrera tiene una duración de entre nueve y diez semestres, más la tesis o proyecto de graduación.

Tomado de: http://www.puce.edu.ec/economia/tramites.php

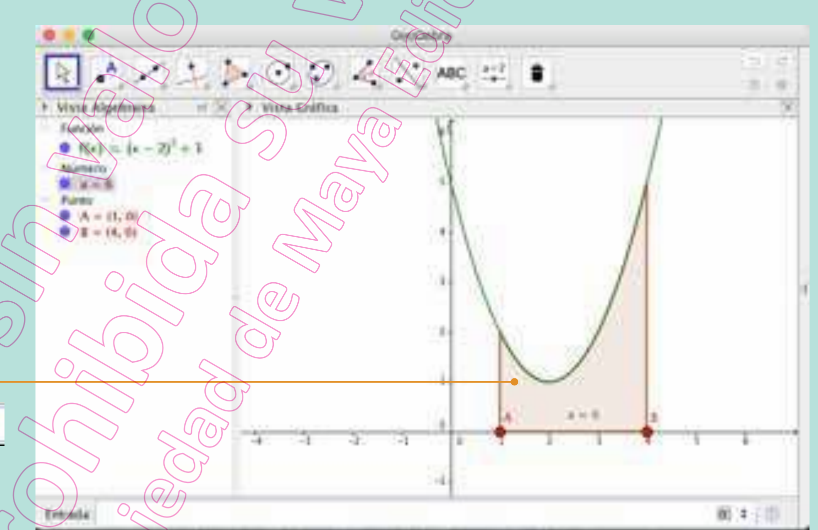
# Integral definida con GeoGebra

**1.** Graficamos una función cuadrática.
**Escribimos** en la barra de *Entrada* la función: $(x - 2)^2 + 1$ y damos *enter* y **localizamos** los puntos A y B.
En las vistas *Gráfica* y *Algebraica* ya consta la función.

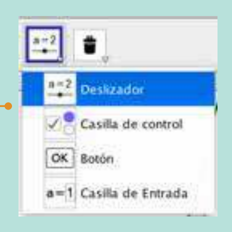


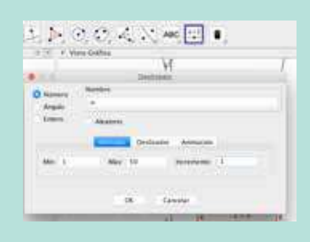
**2.** Calculamos la integral de la función.
**Escribimos** en la barra de *Entrada* "integral de la función x". En este caso, los puntos que hemos señalado son A y B. Por lo tanto, **escribimos** desde el punto A hasta el punto B.
Al hacer *enter*, aparecerá sombreada la parte que nos interesa.

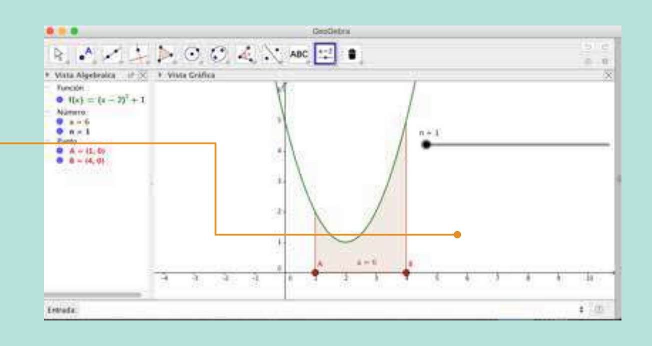
Entrada: Integral[f,x(A),x(B)]



**3.** Medimos el área sombreada.
**Selecciona** la opción *Deslizador* para configurar.
**Cambia** el nombre a *n*. **Elige** el *intervalo* de 1 a 50 unidades.
**Pon** el incremento en 1.
Una vez configurado, **da** *enter* y está listo el deslizador.





**4. Configuramos el deslizador.**

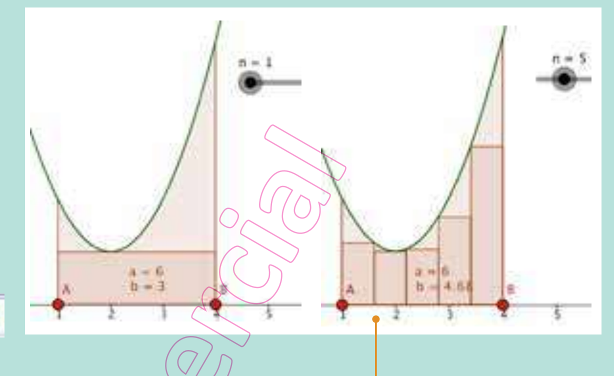
Queremos que el deslizador trabaje en dos secciones que luego corresponderán a una sola área, la que tenemos sombreada.

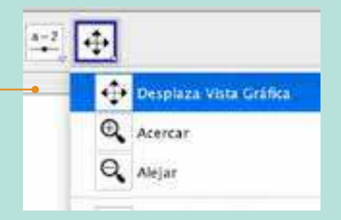
**Selecciona** la opción *Desplaza Vista Gráfica*.

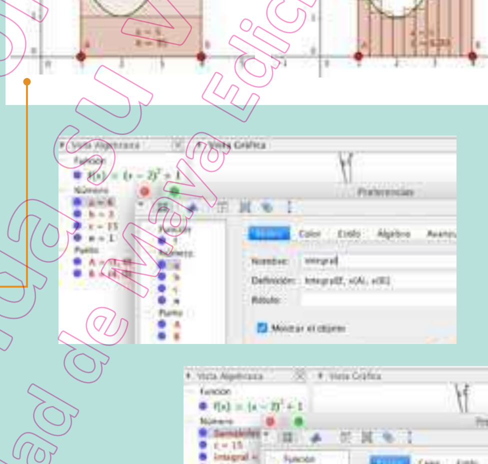
Introducimos en la barra de *Entrada* la función *suma inferior* y escribimos los límites (puntos A y B) y el número de rectángulos (incremento), al que previamente hemos definido con *n*.

Entrada: SumaInferior[f, x(A), x(B),n]

Al desplazar el deslizador, **observa** el número de rectángulos en los que se divide el área inferior.





**5. Haz** lo mismo para la suma superior.

**Escribe** los límites (puntos A y B) y el número de rectángulos (incremento), al que previamente hemos definido con n.

Entrada: SumaSuperior[ f, x(A), x(B), n ]

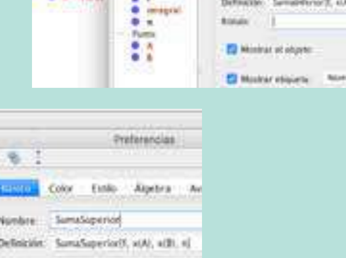
Al desplazar el deslizador, **observa** el número de rectángulos en los que se divide el área superior.

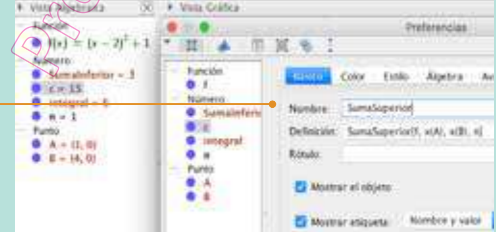
Para tener una mejor visualización, **cambia** los nombres de las variables.

**Anda** a la *Vista Algebraica*, **da** doble clic en A y **modifica** el nombre por integral.

Luego, **haz** doble clic en B y **modifica** el nombre por **Suma Inferior**.

Luego, **da** doble clic en C y **modifica** el nombre por **Suma Superior**.



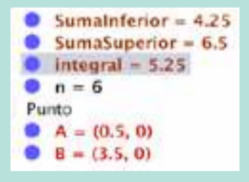


**6. Calcula** el área de la zona señalada.

Al mover el deslizador, **mira** con mayor precisión el área y **aproxímate** a la integral que está calculada.

**Desliza** los puntos A y B, y **encuentra** el área delimitada.

SumaInferior = 4.88
SumaSuperior = 7.37
integral = 6
n = 6
Punto
A = (1, 0)
B = (4, 0)



# Desafíos y proyectos matemáticos

## Tema: Curvas de oferta y demanda en el mercado. Superávit

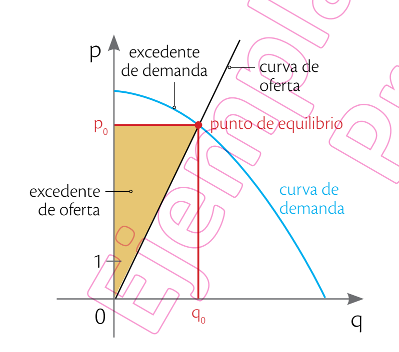
### Recursos

- Modelo de situaciones de mercado
- *Software* (por ejemplo GeoGebra) para graficar funciones



Mercado valores, (2020). www.flirck.com

▲ Mercado de valores.




### Glosario

**superávit.** En el comercio, exceso del haber o caudal sobre el debe u obligaciones de la caja.

### Justificación

La importancia de estudio de las integrales tiene que ver con aplicaciones de las funciones que se utilizan en economía para hacer modelos de situaciones de mercado a partir de las funciones de oferta y demanda.

### Objetivos

- Comprender los conceptos básicos del cálculo integral de manera natural en el manejo de integrales y en la necesidad de usarlas para encontrar la solución de problemas reales.

### Actividades

- Formar equipos de trabajo, con no más de tres estudiantes.
- Analizar el problema planteado como modelo, y proponer una situación similar.
- Calcular el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y oferta dadas.

Función de demanda: $p_1(q) = 1\,000 - 0{,}4q^2$.
Función de oferta: $p_2(q) = 42q$.
Los excesos de oferta y demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica.

La oferta coincide con la demanda en $(q_0, p_0)$, es decir,
$p_1(q) = p_2(q) \Rightarrow 1\,000 - 0{,}4q^2 = 42q \Rightarrow -0{,}4q^2 - 42q + 1\,000 = 0$
$\Rightarrow q_1 = -125$ y $q_2 = 20$.
Como los valores de las abscisas corresponden al número de artículos ofrecidos o demandados, $q_0 = 20$ y, por lo tanto, $p_0 = 840$.

El excedente de demanda o **superávit** de los consumidores es la región comprendida entre $p_1(q)$ y la recta $p = 840$, entre 0 y 20, o sea,

$$\int_0^{20}(1\,000 - 0{,}4q^2 - 840)d_q = \int_0^{20}(160 - 0{,}4q^2)d_q = \left(160q - 0{,}4\frac{q^3}{3}\right)\Big|_0^{20}.$$

El excedente de demanda asciende a $ 2 133,33.
El excedente de oferta es la región comprendida entre las rectas $p = 840$ y $p = 42q$, entre 0 y 20, o sea,

$$\int_0^{20}(840 - 42q)d_q = (840q - 21q^2)\Big|_0^{20} = (840{,}20 - 21{,}20^2) = 8\,400.$$

El superávit de oferta alcanza $ 8 400.

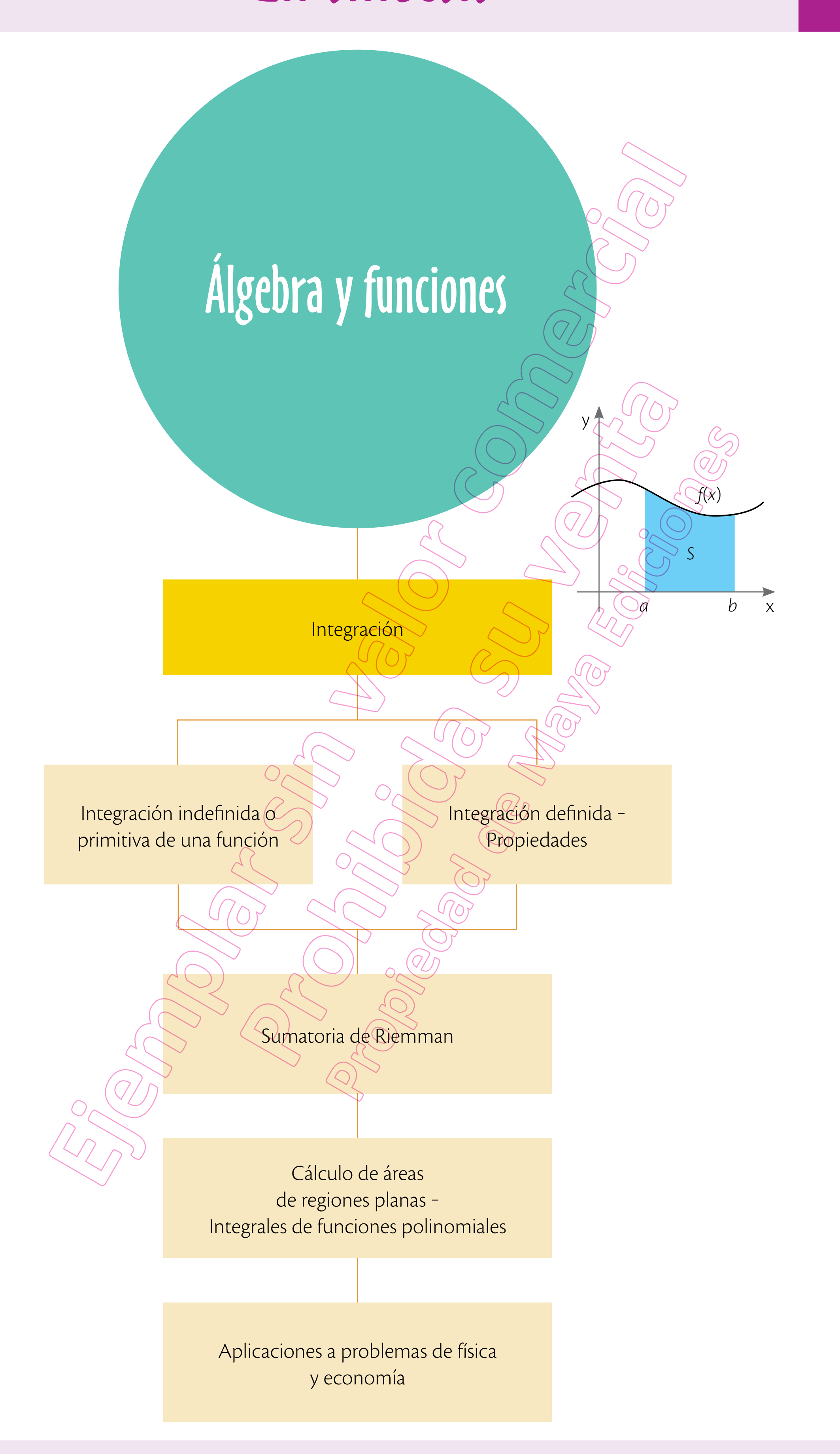
### Conclusiones

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.
- Las funciones de ingreso y costo deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

Tomado de: http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm

# En síntesis



Álgebra y funciones
y
f(x)
S
a
b
x
Integración
Integración indefinida o primitiva de una función
Integración definida - Propiedades
Sumatoria de Riemman
Cálculo de áreas de regiones planas - Integrales de funciones polinomiales
Aplicaciones a problemas de física y economía

# Evaluación sumativa

**[Heteroevaluación]**

I.M.5.5.1. Emplea el concepto de límites en sucesiones convergentes y sucesiones reales; opera con funciones escalonadas; halla de manera intuitiva derivadas de funciones polinomiales; diferencia funciones mediante las respectivas reglas para resolver problemas de optimización; concibe la integración como proceso inverso, y realiza conexiones geométricas y físicas. (I.2.)

**1** En cada ítem se propone una función real $f$. **Encuentra** la integral indefinida de $f$ y **comprueba** que $\frac{dP}{dx}(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = 10x^2 + 11, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

**2** **Halla** una función $u$ que satisface la condición que se indica, que sea integral indefinida de la función $f$ que se define en cada caso. **Calcula**: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ y **comprueba** que este límite es $f(x)$.

a) $f(x) = -\frac{5}{8}x^3 + 3x - 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
$u(0) = 3$.

b) $f(x) = 4 - x + 9x^2 + 2x^3 - 5x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
$u(0) = 2$.

**3** En cada ítem, **aplica** propiedades de la integral definida para calcular la integral dada y **verifica** tu resultado con el dado.

a) $\int_{-3}^{3} (-10x^5 + 7x^3 - 5x)dx = 0$.

b) $\int_{-3}^{3} (-10x^4 + 9x^2 - 5)dx = -420$.

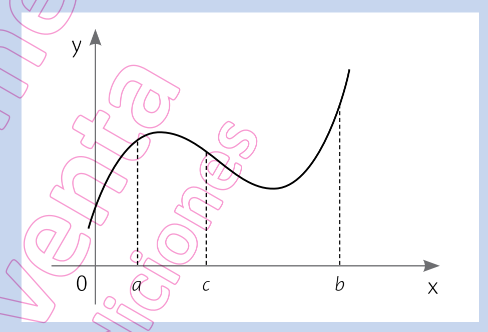
**4** **Considera** la región $S$ que a continuación se define como
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$,
donde $f$ es la función que en cada ítem se especifica. En el sistema de coordenadas rectangulares, **representa** la región $S$ y **calcula** el área $a(S)$.

a) $f(x) = 1 + x + x^2, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad a(8) = \frac{8}{3}$.

b) $f(x) = -8(x + 1), \quad \forall x \in [-1, 0]. \quad a(s) = 4$.

c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 4, \\ 2, & 4 < x \leq 5, \end{cases} \quad a(s) = 10$.

**5** La representación gráfica de una función no negativa es la indicada.

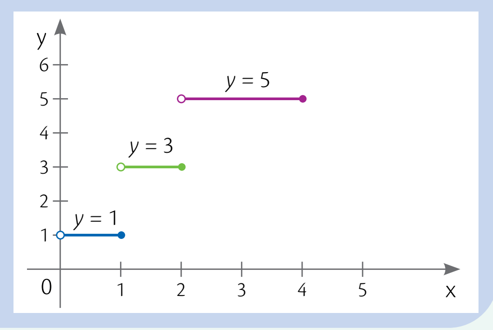



**Interpreta** el significado de:

a) $\int_{b}^{c} f(x)dx$.

b) $\int_{a}^{c} f(x)dx$.

**6** Dada la función del dibujo.




a) **Calcula** en forma manual el área delimitada por $f(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = 5$ y el eje $OX$.

b) **Utiliza** las propiedades de las integrales y **verifica** el valor del área encontrado en el literal $a$.

**7** Dada la función $f(x) = x^3$. **Determina** el área encerrada por la curva y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$. **Realiza** un gráfico de interpretación.

**Resuelve** cada ejercicio y **selecciona** la respuesta correcta.

**8** Dada la función $f(x) = 2x^2 - 3x$, **calcula**:

$\int_0^6 f(x) =$

a) 95. b) 45. c) 90. d) 180.

$\int_{-1}^0 f(x) =$

a) $\frac{13}{6}$. b) $-\frac{5}{6}$. c) $\frac{10}{3}$. d) $\frac{3}{2}$.

**9** **Determina** el valor de la siguiente integral definida:

$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx =$

a) $\frac{10}{3}$. b) $\frac{20}{3}$. c) $\frac{50}{3}$. d) $\frac{70}{3}$.

**10** Una vez que completas el cálculo, la sumatoria de $\sum_{i=1}^{7}(i^2+1)$ es igual a:

$\sum_{i=1}^{7}(i^2+1) = (1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)+(7^2+1)$

$= 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 + 50 =$ ______

a) 137. b) 157. c) 147. d) 167.

**11** La integral definida de $\int_{-1}^0 (2x-3)dx$ es igual a:

a) 1. b) 2. c) −1. d) −4.

**12** Si $\int_{-1}^0 f(x)dx = 0$ y si $f(a)$ existe, entonces:

a) $\int_3^3 f(x)dx = 10$.

b) $\int_3^3 f(x)dx = 0$.

c) $\int_3^3 f(x)dx = 1$.

d) $\int_3^3 f(x)dx = 2$.

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Concibo la integración como el proceso inverso de la diferenciación. | | | |
| Determino la integral indefinida de funciones polinomiales. | | | |
| Encuentro de forma manual el área bajo la curva de una función. | | | |
| Empleo correctamente las propiedades de las integrales para calcular el área de una región. | | | |

**[Coevaluación]**

| | Siempre | A veces | Nunca |
|---|---|---|---|
| Las ideas que se generan en el equipo de trabajo son valederas y aportan para la solución de situaciones. | | | |
| El trabajo en equipo fortalece la relación entre compañeros. | | | |

**[Metacognición]**

a) ¿Qué tema te resultó más fácil en esta unidad?

______

b) ¿Crees que te servirán estos conocimientos en cursos superiores?

______

# Respuestas a las evaluaciones sumativas

**Unidad 1** (páginas 36 y 37)

**1.** a) $-(N + P + Q) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = -N - P - Q$

b) $N - (P - Q) = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & -11 \end{bmatrix} = N - P + Q$

c) $-N - (-P - Q) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = P + Q - N$

**2.** $A + B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{26}{3} & -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{2} & -7 & -\frac{5}{3} \\ 6 & -1 & \frac{11}{6} \end{bmatrix} = B + A.$

**3.** $AB = \begin{bmatrix} -10 & 16 & 5 \\ -8 & 8 & 2 \\ -16 & 10 & 29 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -9 \\ 5 & 1 & -14 \\ -18 & 4 & 14 \end{bmatrix}.$

Claramente $AB \neq BA$.

**4.** $\lambda(\alpha A - \gamma B) = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ -40 & -12 \end{bmatrix} = (\alpha\lambda)A - (\lambda\gamma)B.$

**5.** a) $x = 4,\ y = 1.$
b) $x = -5,\ y = 3.$

**6.** a) $(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} 83 & 50 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}.$

b) $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 50 & 27 \\ 12 & 48 \end{bmatrix}.$

**7.** $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$ $B$ no es la inversa de $A$.

**8.** $x = y = 0{,}08$

**9.** $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

**10.** $x = 3,\ y = 4.$
**11.** b) $-36.$
**12.** c) Verdadero.
**13.** b) $m = 0.$

**Unidad 2** (páginas 70 y 71)

**1.** a) $(-f + g - h)(0) = -1$

b) $(f + g - h)(x) = -2x + 2 - \frac{1}{1 + x},$
$x \in [0, \infty[,$

$-(-f - g - h)(x) = -\frac{1}{1 + x}, x \in [0, \infty[,$

$[-(f + g - h)](x) = -\frac{1}{1 + x}, x \in [0, \infty[.$

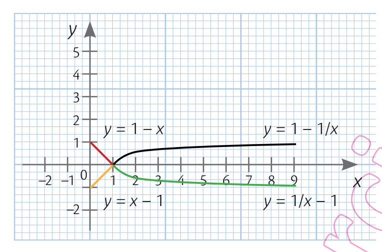
**2.** a) $h(0) = 1,\ h(1) = 0,\ h(2) = ½,$
$h(3) = 2/3,\ h(4) = ¾.$

b) Para $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tales que $x_1 < x_2$, entonces $-x_2 < -x_1$, $1 - x_2 < 1 - x_1$, así $f(x_2) < f(x_1)$.
Para $x_1, x_2 \in [1, \infty]$ tales que $x_1 < x_2$, se tiene

$\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}, -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2},$

$f(x_1) = 1 - \frac{1}{x_1} < 1 - \frac{1}{x_2} = f(x^2).$

c) $(-h)(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ si } 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{x} - 1, \text{ si } 1 \le x. \end{cases}$




d) Basta exhibir un ejemplo: para
$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$ se tiene
$f(x_1) = \frac{1}{2}, f(x_2) = \frac{1}{2}.$
Así, $x_1 \neq x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2)$.

**3.** a) Vectores normales de cada plano.
$\vec{n}_1 = (1, 2, 1) \times (2, 3, 4) = (5, -2, -1),$
$\vec{n}_2 = (3, 5, 5) \times (1, 1, 3) = (10, -4, -2) = 2(5, -2, -1) = 2\vec{n}_1.$
$\Pi_1 \parallel \Pi_2.$

b) $\vec{n}_1 = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1),$
$\vec{n}_2 = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0).$
$\Pi_1$ y $\Pi_2$ n son paralelos.

**4.** Se obtiene $\vec{u} = B - A = (-3, -3, -3),$
$\vec{v} = C - A = (2, 1, 1).$
Ecuación vectorial
$\vec{x} = (1, 2, 3) + \alpha(-3, -3, -3) + \beta(2, 1, 1),$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
Ecuaciones paramétricas:
$\begin{cases} x = 1 - 3\alpha + 2\beta, \\ y = 2 - 3\alpha + \beta, \\ z = 3 - 3\alpha + \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
Ecuación cartesiana:
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $-y + z = 1.$

**5.** a) Vectores normales a cada plano.
$\vec{n}_1 = (1, 1, -2) \times (0, 1, 1) = (3, -1, 1),$
$\vec{n}_2 = (1, 2, 0) \times (0, 1, 1) = (2, -1, 1).$
$\Pi_1$ y $\Pi_2$ no son paralelos.

b) Recta de intersección: $R = \Pi_1 \cap \Pi_2 = \{(-4, 0, 16) + y(0, 1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}.$

**6.** $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{t(3, 2, 7) \mid t \in \mathbb{R}\}.$

**7.** $\vec{r}(t) = (3, 5, 4) + t(-2, -3, 2), t \in \mathbb{R}.$

**8.** a) Planos paralelos.

**9.** d) **10.** c) **11.** a)
**12.** b) **13.** b)

**Unidad 3** (páginas 104 y 105)

**1.** a) $\lim_{x\to\infty} a_n = -\frac{3}{11}.$

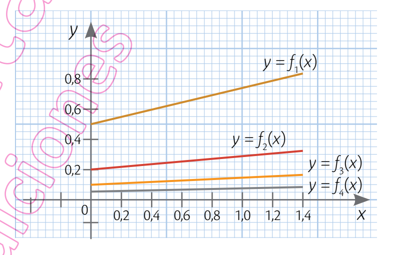
b) $\lim_{x\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$

c) $\lim_{x\to\infty} a_n = 0.$

d) $\lim_{x\to\infty} a_n = 0.$

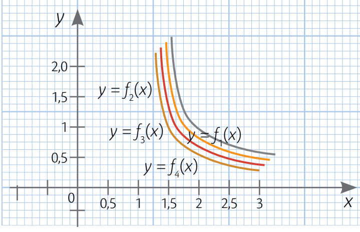
**2.** a) $f_1(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2}, f_2(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{5},$
$f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{10}, f_4(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{17}.$

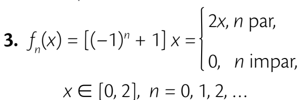
| x | 0 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| $f_2(x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{\sqrt{2}}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{\sqrt{6}}{5}$ |
| $f_3(x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{\sqrt{2}}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{\sqrt{6}}{10}$ |
| $f_4(x)$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{\sqrt{2}}{17}$ | $\frac{2}{17}$ | $\frac{\sqrt{6}}{17}$ |



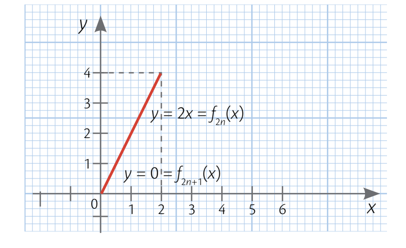

b) $f_1(x) = \frac{\sqrt{5}}{x^2}, f_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{x^2},$
$f_3(x) = \frac{\sqrt{7}}{x^2}, f_4(x) = \frac{2\sqrt{2}}{x^2}.$

| x | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | $\sqrt{5}$ | $\frac{\sqrt{5}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}}{9}$ |
| $f_2(x)$ | $\sqrt{6}$ | $\frac{\sqrt{6}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}}{9}$ |
| $f_3(x)$ | $\sqrt{7}$ | $\frac{\sqrt{7}}{4}$ | $\frac{\sqrt{7}}{9}$ |
| $f_4(x)$ | $2\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ |



**3.** $f_n(x) = [(-1)^n + 1]\, x = \begin{cases} 2x, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}, \end{cases}$
$x \in [0, 2],\ n = 0, 1, 2, \ldots$



a) $f_n(0) = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$
$(f_n(0))$ converge a 0.

b) $f_n\left(\frac{3}{4}\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ impar,} \\ \frac{3}{2}, & \text{si } n \text{ par,} \end{cases} \qquad \left(f_n\left(\frac{3}{4}\right)\right)$
divergente (no converge).

c) $f_n(1) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ impar,} \\ 2, & \text{si } n \text{ par,} \end{cases} \qquad (f_n(1))$
divergente.

d) $f_n(2) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ impar,} \\ 4, & \text{si } n \text{ par,} \end{cases} \qquad (f_n(2))$
divergente.

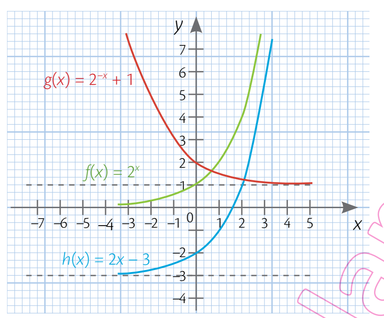
**4.** Distribución binomial
a) 0,215 ó 21,5 %
b) 0,628 ó 62,8 %

**5.** Distribución normal
a) 0,579 3
b) 0,102
c) 0,547
d) 0,598 7

**6.** c) **7.** c)
**8.** i) a, ii) d
**9.** a)

**Unidad 4** (páginas 148 y 149)

**1.** a) $Dom(f_1) = \mathbb{R}$, $Rec(f_1) = ]0, \infty[$,
$Dom(f_2) = \mathbb{R}$, $Rec(f_2) = ]1, \infty[$,
$Dom(f_3) = \mathbb{R}$, $Rec(f_3) = ]-3, \infty[$.
b) Asíntotas de $f_1$: $H_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
Asíntotas de $f_2$: $H_2 = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
Asíntotas de $f_3$: $H_3 = \{(x, -3) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Gráfico




**2.** b) $Dom(h) = ]-2, \infty[$,
asíntota $V = \{(-2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
c) Traslación de la gráfica de g a la izquierda $x > -2$.

**3.** a) $y = \log(x - 2) + 1,\ x > 2$.
b) $y = \log(x - 2) - 1,\ x > -2$.
c) $y = \log(x + 1) + 2,\ x > -1$.

**4.** a) $\ln(\sqrt{x}\,(x^2 + 5)),\ x > 0$.
b) $\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right),\ x > 1$.
c) $\ln = \left(\frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2\,\sqrt[3]{x^2+1}}\right),\ x > 1$.

**5.**

| $n$ | 2 | 10 | 100 | 500 | 1 000 | 5 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2,25 | 2,593 7 | 2,704 8 | 2,715 6 | 2,716 9 | 2,718 0 |

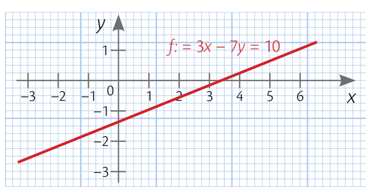
**6.** a) $y = 43{,}904\,93$ g.
b) $x \approx 3{,}465\,7$ años

**7.** a) F. c) V.
b) V. d) F.

**8.** b) **9.** c) **10.** d) **11.** a)
**12.** c) **13.** a)

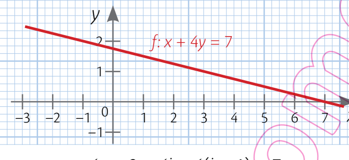
**Unidad 5** (páginas 184 y 185)

**1.** a) $\begin{cases} x = 7j + 1, \\ y = 3j - 1, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}.$



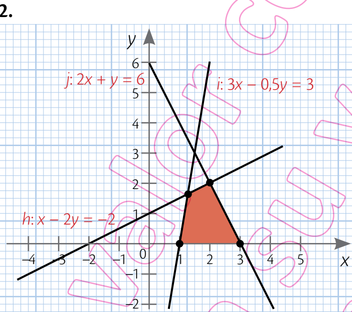

$3x - 7y = 3(7j + 1) - 7(3j - 1) = 10,$
$\forall j \in \mathbb{Z}.$

b) $\begin{cases} x = 3 - 4j, \\ y = j + 1, \end{cases} \quad j \in \mathbb{Z}.$



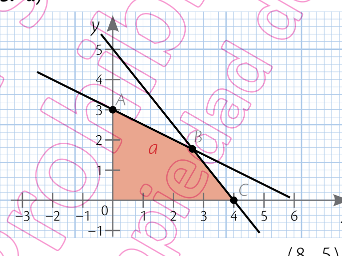

$x + 4y = 3 - 4j + 4(j + 1) = 7.$

**2.**




Vértices de S:
$V_1 = (1, 0);\ V_2 = (3, 0),\ V_3 = (2, 2),$
$V_4 = \left(\frac{14}{11}, \frac{7}{11}\right).$

**3.** a)



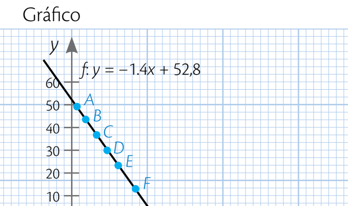

Vértices de S: $A = (0, 3),\ B = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$,
$C = (4, 0), D = (0, 0);$
c) $z = f(x, y) = 4x + 5y$
$z_1 = f(A) = 15,\ z_2 = f(B) = 19,$
$z_3 = f(C) = 16,\ z_4 = 0.$ Máx $z = 19$.

**4.** mín $z = -15$.

**5.**

| $x$ | 2,5 | 6,0 | 10,4 | 16,0 | 20,6 | 28,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | 49,3 | 44,4 | 38,24 | 30,4 | 23,96 | 13,6 |

Gráfico




$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 83{,}5;\quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1614{,}77;$

$R_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i = 199{,}9;\quad R_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2148{,}122;$

$\hat{a} = \frac{S_2R_1 - S_1R_2}{nS_2 - S_1^2} = 50;\quad \hat{b} = \frac{nR_2 - R_1S_1}{nS_2 - S_1^2} = 1{,}4.$

**6.** a) Visiblemente este conjunto de puntos tiene una tendencia de una recta.
b) $S_1 = 84,\quad S_2 = 160\,6,$
$R_1 = 64{,}759,\quad R_2 = 1\,102{,}829.$
$\hat{a} = 4{,}405\,16;\ \hat{b} = 0{,}456\,28.$
$A(t) = 4{,}405\,16 + 0{,}456\,28(t - 90), t \geq 90.$

**7.** c) **8.** b)

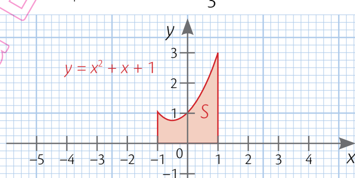
**Unidad 6** (páginas 212 y 213)

**1.** a) $\int (10x^2 + 11)dx = \frac{10}{3}x^3 + 11x + C,$
$\forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$
b) $\int (x^3 + x^2 + x + 1)dx =$
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$

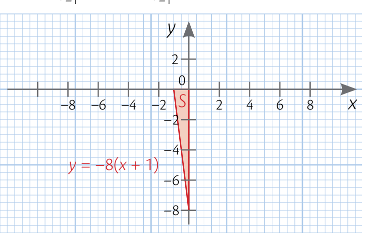
**2.** a) $u(x) = -\frac{5}{32}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + 3, \forall x \in \mathbb{R}.$
b) $u(x) = 2 + 4x - \frac{1}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 - x^5,$
$\forall x \in \mathbb{R}.$

**3.** a) $\int_{-3}^{3} (-10x^5 + 7x^3 - 5x)dx =$
$\left(-\frac{5}{3}x^6 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{3} = 0.$
b) $\int_{-3}^{3} (-10x^4 + 9x^2 - 5)dx =$
$(-2x^5 + 3x^3 - 5x)\,\Big|_{-3}^{3} = 0.$

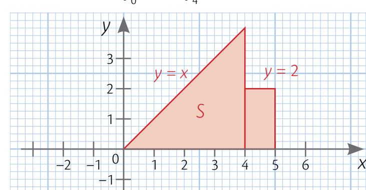
**4.** a) $\int_{-1}^{1} (x^2 + x + 1)dx = \frac{8}{3}.$




b) $\int_{-1}^{0} -f(x)dx = \int_{-1}^{0} 8(x + 1)dx = 4.$




c) $a(S) = \int_0^4 x dx + \int_4^5 2dx = 10.$




a) $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$ con $\int_c^b f(x)dx$
área de la región
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), x \in [c, b]\}.$
b) $\int_a^c f(x)dx$ área de la región
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, c]\}.$

**6.** a) $a(S) = 14.$
b) $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx =$
14.

**7.** $\int_0^3 x^3(dx) = \frac{81}{4}.$ **8.** c) y b).

**9.** d) **10.** c) **11.** d) **12.** b)

# Bibliografía


Apostol, T. M. (1977). *Calculus* (2.ª ed.). Barcelona: Editorial Reverté.

Ayres, F. Jr. (1965). *Theory and Problems of Modern Algebra*. Nueva York: Schaum Publisihg Co.

Barnett, R. A., Ziegler, M.R. y Byleen, K. E. (1999). *College Algebra*. Boston: McGrawHill.

Benalcázar, H. (2008). *Curso elemental de Geometría*. Quito: PDF publicado por el autor en la Facultad de Ingeniería, Universidad Central del Ecuador.

------------------ (2012a). *Matemática para Bachillerato*. Tomo 1. Quito: Impresión Hernán Benalcázar.

------------------ (2012b). *Matemática para Bachillerato*. Tomo 2 y tomo 3. Quito: Preprinter (por publicarse).

Birkhoff, G. y MacLane, S. (1974). *Álgebra moderna* (4.ª ed.). Barcelona: Editorial Vicens-Vives.

Bolster, C.L., Boyer, C., y otros (1990). *Exploring Mathematics*. Glenview, Illinois: Scott Foresman & Company.

Brabant, P., Carnec, H., Nouet, M. y Seroux, R. (1990). *Mathématiques*. París: Editorial Bordas.

Carnec, H., Compagnon, P., Randé, B. y Seroux. R. (1991). *Mathématiques*. París: 1er A1 et B, Editorial Bordas.

Castro, L. (2013). *Matemática*. Quito: Maya Ediciones C. Ltda.

Compagnon, P., Nouet, M., Randé, B. y Seroux, R. (1991). *Mathématiques. Analyse*. París: 1er S y E, Editorial Bordas.

Copi, I. M. (1982). *Lógica simbólica*. México D. F.: Editorial C.E.C.S.A.

Diccionario Enciclopédico Ilustrado. (1994). Madrid: Cultural S. A. de Ediciones.

Fang, J. (1963). *Theory and Problems of Modern Algebra*. Nueva York: Editorial Shaum Publishing Co.

Gabba, P. J. (1974). *Matemática para maestros*. Buenos Aires: Ediciones Merymar.

Galindo, E. (2015). *Estadística, métodos y aplicaciones*. Quito: Prociencia Editores.

Gómez, R., Wills, D., Guarin, H. y Londoño, N. (1976). *Matemática moderna estructurada* (Vols. 1-6). Bogotá: Editorial Norma.

Haye, G., Nouet, M., Serra, E. y Venard, J. (1992). *Mathématiques. Algèbre. Géométrie.* Terminales C et E. París: Editorial Bordas.

Kalnin, R. A. (1973). *Álgebra y funciones elementales*. Moscú: Editorial Mir.

Keil, J. (1975). *Géométrie Anlytique Plane*. Namur: Editorial La Procure.

Kelley, J. L. y Richert, D. (1970). *Elementary Mathematics for Teachers:* San Francisco: Editorial Holden-Day.

Kostrikin, A. I. (1978). *Introducción al Álgebra*. Moscú: Editorial Mir.

Kuratowski, K. (1966). *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*. Barcelona: Editorial Vicens-Vives.

Kurosh, A. (1973). *Cours d' Algèbre Supérieure*. Moscú: Editorial Mir.

Lara, J. y Benalcázar, H. (1991). *Fundamentos de análisis matemático* (Vols. I-III). Quito: Editorial Centro de Matemática, Universidad Central del Ecuador.

------------------ (2005). *Fundamentos de análisis matemático* (3.ª ed.). Quito: Editorial Centro de Matemática, Universidad Central del Ecuador.

Layman, S. C. (1999). *The Power of Logic*. Mountain View: Editorial Mayfield Publishing Company.

Leithold, L. (1994). *El cálculo* (7.ª ed.). México D. F.: Grupo Mexicano Mapasa, S. A. de C. V.

Lewis, D. J. (1970). *Introducción al Álgebra*. Nueva York: Editorial Harper & Row Publishers Inc.

Muschla, J. A. y Muschla, G. R. (2006). *Hands-On Math Projects*. San Francisco: Jossey-Bass.

Niven, I. y Zuckerman, H. S. (1969). *Introducción a la teoría de los números*. México D. F.: Limusa Wiley, S. A.

Negro, A. y Zorio, V. (1975). *Cerca de la Matemática* (1). Madrid: Editorial Alhambra.

------------------ (1978). *Curso de Matemáticas. Orientación universitaria*. Madrid: Editorial Alhambra.

Negro, A., Pérez, S., Cacho, S. y Thio de Pol, S. (1977). *Cerca de la Matemática* (3). Madrid: Editorial Alhambra.

Pérez, J., Caro, V. y Obonaga, E. (1986). *Matemática* (Vols. 1-6). Bogotá: Editorial Pime Editores S. A.

Rice, B. J. y Strange, J. D. (1989). *College Algebra with Applications*. Pacific Grove: Brooks/Cole Publishing Company.

Robert H. D., Lawrence T. A. y Yelon, S. (2001). *Diseño de sistemas de aprendizaje*. México D. F.: Editorial Trillas.

Sáenz, R., Lara, J., Benalcázar, H. y León, H. (2003). *Matemática básica* (2.a ed.). Quito: Editorial Centro de Matemática, Universidad Central del Ecuador.

Spiegel, M. R. (1956). *Theory and Problems of College Algebra*. Nueva York: Editorial Schaum Publishing Co.

Suppes, P. y Hill, S. (1982). *Introducción a la lógica matemática*. Barcelona: Editorial Reverté S. A.

Trejo, C. A. y Boch, J. E. (1973). *Ciclo medio de matemática moderna*. Quinto curso. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Wexler, C. (1968). *Geometría analítica: un enfoque vectorial*. Barcelona: Editorial Montaner y Simón, S. A.

Whitesitt, E. J. (1971). *Álgebra booleana y sus aplicaciones*. México D. F.: Editorial CECSA.

Zemansky, M. (1967). *Introducción al álgebra y análisis moderno*. Barcelona: Editorial Montaner y Simón, S. A.


# Webgrafía


*Funciones como modelos matemáticos* (s. f.), [en línea]. Departamento de Matemática de la Universidad de Sonora. Disponible en: http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Funcion/4-funciones-modelos-jl.pdf [2016, 8 de junio].

*Matemática. Función cuadrática, parábolas y ecuaciones de segundo grado* (2014), [en línea]. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Ministerio de Educación. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/matematica_cuadratica_13_06_14.pdf [2016, 7 de abril].

*Probabilidad* (s. f.), [en línea]. Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. Disponible en: http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T02.pdf [2016, 7 de junio].

*Unidad 3: Funciones trigonométricas* (s. f.), [en línea]. Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM. Disponible en: http://www.matepop.com.mx/phocadownload/Libros/GuiaProfesM4/Unidad3.pdf [2016, 12 de septiembre 2016].

La inclusión en la educación cómo hacerla realidad (s.f.), [en línea]. Ministerio de Educación de Perú. Disponible en: www.oei.es/historico/pdfs/educacion_inclusiva_peru.pdf [2016, 29 septiembre 2016]

PLAN NACIONAL
DEL LIBRO Y LA LECTURA
José de la Cuadra




# ¡LEER ENCIENDE TU IMAGINACIÓN!



Bachillerato General Unificado
Tercer curso
Matemática

MINISTERIO DE EDUCACIÓN • MINISTERIO DE CULTURA Y PATRIMONIO




# Carta de amor a un trapezoide

**Claudi Alsina**

Querido trapezoide:

Le sorprenderá que por primera vez alguien le haga una declaración de amor y ésta no provenga de una figura plana. Su pertinaz vivencia en el plano le ha mantenido siempre al margen de lo que ocurre por arriba o por abajo, enfrente o detrás.

Digámoslo claramente: yo lo conocí hace años pero usted aún no se había enterado, hasta hoy, de mi presencia. Debo pues empezar por el principio y darle noticia de cómo fue nuestro primer encuentro.

Ocurrió una tarde de otoño lluviosa. Una de estas tardes de octubre en que llueve a cántaros, los cristales de los colegios quedan humedecidos y los escolares sin recreo. Usted estaba quieto en una página avanzada de un libro grueso que era nuestra pesadilla continua. Me acuerdo aún perfectamente. Página 77, al final hacia la derecha. Fue al abrir esta página, siguiendo la orden directa de la señorita Francisca, nuestra maestra, cuando lo vi por primera vez. Allí estaba usted entre los de su familia, un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo, un trapecio, un rombo, un romboide,... y ¡el trapezoide!

Un perfil grueso delimitaba sus desiguales lados y sus extraños ángulos. La señorita Francisca se fue exaltando a medida que nos iba narrando las grandes virtudes de sus colegas cuadriláteros... que si igualdades laterales, que si paralelismos, que si ángulos, que si diagonales... y el rato fue pasando y la señorita seguía sin decir nada. Como las señoritas acostumbran a no explicar lo más interesante, a mí se me ocurrió preguntarle,

—Señorita… ¿y el trapezoide?
—Este —replicó la maestra— este es el que no tiene nada.
—¿Nada de nada? —le repliqué
—Sí, nada de nada —me contestó— y sonó el timbre. Quedé fascinado: usted era un pobre, muy pobre cuadrilátero. Estaba allí, tenía nombre, pero nada más. Por eso a la mañana siguiente volví a insistir en el tema a la señorita.

—Así debe ser muy fácil trabajar con los trapezoides —le dije— ya que como no tienen nada de nada no se podrá calcular tampoco nada de nada.
—¡Al contrario! Estos son, los más difíciles de calcular. Ya lo verá cuando sea mayor.

Durante aquella época yo creí intuir que matemáticas y cosas sexuales debían tener algo en común pues siempre se nos pedía esperar a ser mayores para "verlo". A usted ya no lo vi más, hasta que en Bachillerato don Ramiro nos obsequió con una fórmula muy larga para calcular su área. Esto me enfadó enormemente. Usted había pasado del "nada de nada" al "todo de todo". A partir de entonces empecé a pronunciar su "oide" final con especial desprecio "¡trapez-OIDE!".

Tomado de https://bit.ly/2OUvczV (17/01/2018)

**Claudi Alsina** (1952). Escritor de temas matemáticos. Matemático, divulgador y profesor con larga trayectoria docente y de investigación.




# Max Planck

Francisco Doménech

Si los físicos escribieran la Historia, estaríamos en el siglo II de nuestra era, más concretamente en el año 116 después de Planck, el físico alemán que cambió nuestra visión del mundo cuando puso la primera piedra de la teoría cuántica en el año 1900 (de la era cristiana). Y eso que algunos de sus profesores le habían recomendado que se dedicase a las Matemáticas, que la Física no tenía futuro.

Cuando Max Planck (1858-1947) entró en la universidad parecía que en la Física todo estaba descubierto. A finales del siglo XIX el movimiento, la materia, la energía, el calor, el electromagnetismo y la luz se entendían muy bien por separado, pero no tanto cuando se relacionaban. Por ejemplo, los físicos tenían problemas para explicar la forma en que los cuerpos calientes irradian energía.

El cuerpo humano emite radiación infrarroja, no está lo suficientemente caliente como para emitir luz visible; pero sí lo están el Sol o un clavo al rojo vivo. Si el clavo se calienta aún más, en su luz irá predominando el naranja, amarillo, verde, azul y violeta. Esto no había manera de encajarlo con ninguna fórmula construida según las reglas de la Física clásica, así que a los 42 años Planck decidió saltarse esas normas y se sacó de la manga un número fijo, con treinta y cuatro ceros a la izquierda, que introdujo entre las incógnitas de sus ecuaciones. En principio usó ese número diminuto solo porque le permitía resolver el problema, pero meses después se dio cuenta de lo que significaba: la radiación no era un chorro continuo de energía, sino que la energía salía disparada en pequeñas porciones indivisibles, a las que llamó "cuantos". Aquello le sonaba tan ridículo como si al pulsar una tecla de su órgano oyese un sonido intermitente, entrecortado.

Planck era un buen músico. Los conciertos que daba en su casa de Berlín servían de plácida reunión a consagrados científicos, teólogos, filósofos y lingüistas. Nada más lejos de su intención

que poner ese mundillo intelectual patas arriba; y de hecho, él fue el primero en desconfiar de su teoría cuántica y trató por todos los medios de librarse de aquel número diminuto (de revolucionarias implicaciones), que hoy llamamos la constante de Planck. Pero no lo logró, y su teoría cambió la Física para siempre, por lo que recibió el Nobel en 1918. Tampoco pudo parar a los nazis, que en los años 30 subieron al poder y también acabaron controlando y usando para sus intereses bélicos la Sociedad Germana de las Ciencias, presidida por Planck. Entonces, él dimitió. Aguantó en Alemania hasta el final de la Segunda Guerra Mundial, a pesar de que perdió todas sus notas científicas en un bombardeo y de que su hijo fue ejecutado, acusado de conspirar para asesinar a Hitler.

A pesar de la resistencia inicial, primero Einstein y luego muchos otros científicos adoptaron las ideas cuánticas de Planck para explicar que las ondas de luz a veces se comportan como un chorro de partículas y que los electrones que giran en los átomos son al mismo tiempo partículas y ondas; o para descubrir que hay más formas de conseguir luz que hacer fuego o calentar un metal. Los beneficios fueron enormes: el tubo fluorescente, el láser, la electrónica…

Gracias a Planck y su teoría cuántica, la física ya se podía aplicar a lo infinitamente pequeño, pero a cambio se convirtió en algo que supera nuestra imaginación: un electrón ocupa al mismo tiempo todos los puntos de su órbita, puede saltar a otra órbita sin pasar por ningún punto intermedio y su trayectoria es impredecible, al contrario que la de un objeto en movimiento, como una bala. Al menos la Física clásica seguía sirviendo para las cosas que vemos con nuestros propios ojos. Como dijo Bohr, el primero en usar la cuántica para describir el átomo: "Si nada de esto te parece chocante, es que no lo has entendido".

Tomado de https://bit.ly/2Vwlq9B (13/03/2019)

**Francisco Doménech** (1974). Periodista español. Escribe para el diario El País, de España.




# El cubo de Borges

**José Gordón**

A principios del siglo XX, un niño juega en la casa de su tío con unos cubos que le ayudan a imaginar un mundo con más dimensiones de las que observamos. Se trata de un material que acompañó a un libro del matemático Charles Hinton, titulado Una nueva era del pensamiento (1888). La editorial londinense Swan Sonnenschein hizo un verdadero libro-objeto. El texto planteaba el problema de una geometría que se mueve en una cuarta dimensión espacial. Si sumamos el tiempo, estamos hablando de una quinta dimensión. Para visualizar lo impensable, Hinton creó una serie de 81 cubos de diferentes colores. Con esos cubos, dice el investigador Ioan Couliano, jugaba un niño que se llamaba Jorge Luis Borges.

La idea de Hinton era que cada una de las caras del cubo debía memorizarse. Esto permitiría realizar todo tipo de operaciones mentales para construir diversos objetos. Con este entrenamiento, se podría ver entonces su interior, sus entrañas. La imaginación de Hinton no paraba ahí. Ese era tan solo uno de los pasos necesarios para aprender a visualizar una dimensión superior. En el libro Más allá de este mundo, Couliano señala que en esta búsqueda, Hinton construyó una especie de hipercubo a partir de 64 cubos más pequeños —un antecedente del llamado cubo de Rubik— y elaboró un patrón completo que supuestamente podría hacer girar al cubo más grande hacia una dimensión superior. Esto se lograba al hacer rotar de manera precisa a los cubos menores.

En el prólogo del libro *Hinton. Relatos científicos*, Borges detalla aún más el difícil y rebuscado proceso de visualización propuesto por el matemático inglés. Dice que Hinton daba una dirección en Londres donde el interesado podía adquirir varios juegos de pequeños poliedros de madera: "Con estas piezas había que construir pirámides, cilindros, prismas, cubos, respetando ciertas rígidas y prefijadas correspondencias de aristas, planos y colores que llevaban nombres extraños. Aprendida de memoria cada heterogénea estructura había que ejercitarse en la imaginación

de los movimientos de sus diversas piezas. Por ejemplo, el desplazamiento del cubo rosa oscuro hacia arriba y hacia la izquierda desencadenaba una compleja serie de movimientos de todo el conjunto. A fuerza de semejantes ejercicios mentales, el devoto lograría intuir paulatinamente la cuarta dimensión".

Podemos imaginar cómo el niño Borges juega con los cubos para armar un poliedro que se asemeja a una esfera. En una de las caras pulidas hasta la transparencia ve reflejado su rostro. En otra de las caras se ve a sí mismo pero viejo. ¿Así será su rostro del futuro? Toca esa imagen que parece desprenderse de una de las aristas como una lámina delgada. Borges la remueve delicadamente como se da la vuelta a la hoja de un libro viejo que está a punto de resquebrajarse. Se abre una cara del poliedro. Borges penetra en el interior de esa figura. Cruza una nueva dimensión espacial y el tiempo cambia. Ha envejecido. Su cuerpo cansado baja unas escaleras apoyado con un bastón. Al pie de la escalera encuentra una maravillosa esfera de casi intolerable fulgor. Borges escribirá sobre ella en un cuento llamado "El Aleph" que habla de un punto que, como en un holograma cósmico, contiene todos los puntos del universo. El Aleph es una miniatura del poliedro al que ha entrado. Lo toma en sus manos. Tiene el privilegio de ver lo que sus ojos ciegos no verán de nuevo.

Es una geometría inimaginable. Todo parece de manera simultánea: el centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna. Cada cosa se puede ver desde todos los puntos de vista, de una manera vertiginosa que parece fluir a la velocidad de la luz. En su relato Borges aludirá a poetas y a místicos para ensayar una descripción: "Es como un ángel de cuatro caras que a un mismo tiempo se dirige al Oriente y al Occidente, al Norte y al Sur". Borges la contempla. La ve en sus manos, en las paredes que le rodean. Está en el Aleph dentro del Aleph. Se emociona con lo que puede observar. Brinda su testimonio: "Vi el populoso mar, vi el alba y la tarde, vi las muchedumbres de América, vi una plateada telaraña en el centro de una negra pirámide, vi un laberinto roto (era Londres), vi interminables ojos inmediatos escrutándose en mí como un espejo…". Aparece la violenta cabellera de una mujer, un poniente en Querétaro que parece reflejar el color de una rosa en bengala. Surge un globo terráqueo, entre dos espejos, multiplicado sin fin. El escritor se deslumbra ante la bandada



de imágenes: una baraja española, tigres, todas las hormigas que hay en la tierra, un astrolabio persa… Borges sabe que ha llegado a la frontera de la unidad de la vida: "Vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la Tierra, y en la Tierra otra vez el Aleph, y en el Aleph la Tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo".

Tomado de Gordón, J. (2017). *El inconcebible universo*. Sueños de unidad. México: Editorial Sexto Piso.

**José Gordón** (1953). Novelista, ensayista y traductor mexicano. Conduce y dirige revistas de ciencia y pensamiento. Recibió el Premio Nacional de Periodismo en Divulgación Científica y Cultural.



## Dos choques

**Aline Guevara**

I

¡Qué bárbaro! No sé cómo no me vio, por suerte yo no iba tan despacio. Por eso cuando me pegó en la defensa trasera, no me dio tan fuerte. Yo iba a unos 100 km/h, y él iba como a 140 km/h. ¡Qué suerte que avanzábamos en la misma dirección!

Cuando dos vehículos que llevan la misma dirección chocan, sus velocidades se restan.

II

No recuerdo qué pasó. El policía le explicó a mi familia que, como el otro coche venía en sentido contrario, la velocidad final de la colisión fue enorme.

Cuando dos vehículos llevan direcciones opuestas, al encontrarse y chocar, sus velocidades se suman.

Estos escenarios nos hablan de choques que, desafortunadamente, pueden verse todos los días. Pero hay otro tipo de colisiones donde las velocidades ni se restan ni se suman. Si chocaras contra una partícula de luz, no importaría la dirección ni la velocidad que lleves, pues la luz siempre viaja a la misma velocidad: casi 300 mil kilómetros por segundo. Las velocidades no se sumarían, ni se restarían, ni nada. Y si viajáramos en un rayo de luz, el recorrido sería muy distinto a la experiencia de viajar en un auto.

Tomado de Guevara Villegas, A. (2005). Un viaje especial. Mexico: Ediciones Castillo.

**Aline Guevara Villegas** (1974). Científica mexicana especialista en comunicación visual de la ciencia. Escribe textos y artículos, participa en programas de radio, y en el desarrollo de acciones para llevar el saber científico y tecnológico a grandes sectores de la población.



## Nada

**Rafael Hitos**

Cuando eran jóvenes, ambos destacaban intelectualmente sobre el resto de alumnos. Roberto siempre fue más listo, siempre estaba un paso por delante de él. Pero la íntima amistad que tenían hacía de su relación algo fraternal, donde no había cabida para la envidia y el afán de protagonismo.

Codo a codo investigaron, durante años y años, algo que creían que tenía un aspecto místico desconocido del campo de las matemáticas; algo que, según ellos, era mucho más importante de lo que jamás nadie imaginó, y que tenía un valor todavía desconocido. Se trataba del estudio de lo infinito y de la ausencia de toda materia. Dos conceptos inabarcables para la mente humana. Años y años dedicados a la explicación matemática del verdadero significado de lo que ellos más tarde llamarían Cero Absoluto.




En los últimos años habían descuidado mucho la investigación, que habían dado casi por perdida, y se habían centrado más en sus vidas profesionales, como profesor de la universidad de Madrid y, en el caso de Roberto, director del departamento de diseños de modelos matemáticos para una importante empresa de consultoría.

El cigarro se consume mientras permanece allí, sentado delante de sus notas y apuntes. Notas y apuntes rescatados de años anteriores. Todos los restos de la investigación, aparcada en el olvido hasta ese momento. Llevaba ya varios días encerrado en el sótano de aquel piso de Madrid. Por el pequeño ventanuco solamente veía de vez en cuando, los pies de algún transeúnte de la calle.

Su corazón late rápidamente. El sudor cae por su frente y resbala hasta llegar a la barbilla, poblada por una densa barba descuidada. Está nervioso. Lo nota cercano. Sabe que la respuesta está muy cerca. Toda su vida esperando este momento. Nunca pensó que sería en estas condiciones, pero necesita resolverlo ya. La desaparición de Roberto no ha sido casual. Últimamente le notaba muy nervioso. Le sorprendía haciendo cálculos de cabeza mientras comían juntos, o simplemente parecía estar ausente. Sabía que algo estaba ocurriendo, pero Roberto no le dijo nada.

Llegó a casa después de las clases y escuchó los mensajes del contestador automático. Uno era de Roberto. Su voz sonaba tensa, entrecortada. Se le notaba eufórico: "Miguel, ya lo tengo. Por fin es nuestro. Solo me quedan un par de detalles. Mañana a las dos en mi casa. Hablamos". Eso decía el mensaje. Miguel no pudo esperar al día siguiente. Si se trataba del Cero Absoluto, no podía esperar a mañana.

Esa misma noche cogió la bici y salió en dirección a casa de Roberto. Al llegar encontró la casa vacía. Alzó la voz llamando a Roberto un par de veces, pero este no respondía. Se dirigió al despacho donde solía trabajar e investigar. Al llegar, lo encontró tal y como se muestran las habitaciones de los lunáticos en las películas de Hollywood. Todo lleno de papeles colgados de paredes y techo, llenos de notas y apuntes. Todos relacionados con el Cero Absoluto. Pero Roberto no estaba allí. Su abrigo, su ordenador, todo estaba allí en el despacho. Daba la sensación de que había

estado siguiendo la investigación. Una taza de café reposaba sobre el escritorio, todavía caliente. Y las gafas de cerca, encima del libro, descomponían la luz sobre el papel.

Roberto desapareció. Ni en la oficina, ni en casa de su hija. Nada. Simplemente desapareció. Encerrado con sus cigarrillos. Con todos los apuntes que rescató del despacho de Roberto. Todo aquello que seguramente llevó a su amigo a desvelar el misterio. Había perdido la noción del tiempo, obsesionado con descubrir la verdad que tanto tiempo había estado buscando y que tan cercana sentía. La verdad que probablemente fuese la causa de la desaparición de Roberto. Piensa rápido. Está cerca… ¡tan cerca! Ya se lo está imaginando. Los números y ecuaciones vuelan por el papel. El método que Roberto creó expresamente para esa investigación facilita el proceso.

Cuando abandonaron la investigación, había llegado a un punto de no retorno: no hacían más que llegar al mismo resultado una y otra vez. Un resultado que no decía realmente nada nuevo. Una igualdad elemental. ¿Qué es lo que Roberto había descubierto? ¿Cómo había salido de aquel bucle? Las notas de su amigo desaparecido plagan la mesa de estudio. Busca pistas de lo que fuera que su amigo descubrió. Las horas pasan, hasta que por fin…

Ya está, ya lo ha entendido. Era tan simple. ¿Cómo no se le había ocurrido antes? Si lo que piensa es cierto, ya solo es cuestión de hacer una simple sustitución. Todos los grandes misterios del universo, reflejados matemáticamente. La ausencia de materia… el Cero Absoluto. Todo lo que habían estado buscando durante tanto tiempo, y ahora ya lo tenía en sus manos. Una suma más y…

Los apuntes de Miguel se amontonan en la mesa. El lápiz con el que escribía yace como un cadáver sobre los folios. El cigarro todavía humeante reposa en el cenicero, pero ya nada queda de Miguel. Simplemente ha desaparecido. El descubrimiento de la verdad del Cero Absoluto le ha llevado a comprender el verdadero significado de la ausencia de toda materia, pensamiento o idea, la ausencia de su propia existencia. Ausencia absoluta.

Tomado de https://bit.ly/2KgYVEo (05/02/2018)

**Rafael Hitos**. Divulgador de conocimientos matemáticos.




## ¿A dónde van a dar los calcetines? (fragmento)

**Jake Page**

En 15 años de analizar la literatura científica, no he leído nunca sobre un calcetín, y mucho menos sobre un par de calcetines, que, como todo el mundo sabe, constituyen el meollo del asunto. Los científicos han estudiado venturosamente la física de las partículas y su fusión, el código genético y la composición bioquímica de la sangre. Incluso, han intentado codificar el comportamiento humano. Sin embargo, en ninguna parte han explorado un asunto tan misterioso como el de los calcetines y su infinita capacidad de desaparecer. ¿Cuántas veces, a la tenue luz del amanecer, me he acercado al ropero, he abierto el cajón y me ha espeluznado el saber que en sus revueltas entrañas no habría de hallar jamás dos calcetines iguales?

Este no es asunto frívolo ni meramente personal, sino un fenómeno que tiene muchísimo que ver con la economía de mi país. Proveer de cinco partes de calcetines anuales a cada uno de los 230 millones de estadounidenses, a razón de 365 metros de hilaza por persona, requiere de más de 400 millones de kilómetros de lana algodón, derivada del petróleo.

Y esos calcetines errantes no se van por el caño. En las ocasiones en que me he dado a la tarea de indagar qué mágicos artículos han conseguido refugiarse en la fosa séptica, no he descubierto ni un solo calcetín. Los experimentos con un doble calentador de agua han demostrado que el calor no volatiza los calcetines, y que ni siquiera los reduce a hilachos que pudieran escapar por el filtro de una secadora eléctrica de ropa.

Un amigo mío ha demostrado de modo concluyente que los ganchos de alambre para colgar la ropa, si se dejan solos en el guardarropa, se enredan, se aparean y se reproducen. Si esto es verdad, se me ocurre que los calcetines podrían ser caníbales. ¿Será posible que cada par de calcetines esté formado esencialmente por especies distintas, con un calcetín alfa y otro beta? ¿Qué el calcetín alfa devore al calcetín beta? Por desgracia, ninguna agencia patrocinadora ha respondido favorablemente a mis intentos de recabar los fondos necesarios para probar esta hipótesis.

Y lo cierto es que ninguna agencia de patrocinio a científicos parece estar al tanto, ni tiene la más remota idea de la cantidad de plagas y fastidiosos misterios que surgen en la vida diaria de los ciudadanos, dificultades que seguramente contribuyen al estrés, responsable de tantas enfermedades y muertes. Pero sí hay científicos preocupados por esto.

Conozco a un arqueólogo que, entre sus múltiples logros, tiene nueve hijos. Al arqueólogo y a su esposa les gusta dormir hasta muy tarde los sábados. Para poder hacerlo, mi amigo se levanta temprano, arrea a sus hijos a la habitación donde está el televisor, lo enciende, les da una caja con medio kilo de galletas y regresa a la cama. Y cada sábado, luego de volver a despertar y desayunarse, entra en la sala de televisión y barre un kilo de migas de galletas. Este milagro semanal ha servido para confirmar su fe en el relato bíblico según el cual inmensas muchedumbres fueron alimentadas con unos cuantos panes.

Como yo soy mucho menos devoto, me parece inexplicable que, al llevar comestibles y cosas por el estilo a mi casa, y al sacar la basura, tenga la sensación de que acarreo hacia afuera más cosas que las que metí. Esto indica una generación espontánea que atenta contra mi susceptibilidad científica. Sin embargo, un conferenciante puntualizó hace poco en la Universidad Rutgers que las sobras en el refrigerador "se multiplican al cerrarse la puerta". Con todo, los calcetines desaparecen. Lo mismo ocurre con lápices y plumas, y también con los ganchos de madera para colgar ropa.

Sin duda, existe un Sistema de Cosas más grande, en el cual algún día se descubrirá que estos comportamientos, en apariencia disímiles, se corresponden. ¿Es posible, por ejemplo, que los calcetines sean en realidad la forma larvaria de los ganchos de alambre para colgar la ropa?



Tomado de Page, J. (enero de 1986). ¿A dónde van a parar los calcetines? *Reader´s Digest*.

**Jake Page** (1936-2016). Periodista estadounidense, autor de varios libros sobre ciencia, historia natural y cultura americana.




## ¿Todo es un número?

**Bernardo Recamán Santos**

El examen que hemos hecho de un día cualquiera en la vida de un personaje típico de nuestro siglo, nos lleva a pensar que quizás todo es infinitamente una cuestión matemática. Tal es el poder de las matemáticas que esa posición extrema (y totalmente errónea) fue asumida por muchos pensadores del pasado, y hoy día no falta quienes todavía la defienden.

Unos quinientos años antes de nuestra era, Pitágoras afirmaba con toda convicción que "el número es la sustancia de todo". A su vez, Sigmund Freud, a los 17 años de edad, escribió: "He observado que todo lo que ocurre en el mundo real tiene su equivalente, o incluso su contraparte, en el mundo de los números". Ambos estaban equivocados.

En el siglo XVII, otro de los grandes sabios de la historia, el filósofo y matemático francés René Descartes creyó también encontrar en las matemáticas toda la verdad: "Las largas concatenaciones de razonamientos simples y fáciles que los geómetras utilizan para lograr sus demostraciones más difíciles me dieron la ocasión de imaginarme que todos los asuntos que se pudieran encontrar en la mente humana estaban interrelacionados de esa manera". Esta cita pertenece al Discurso del método. Esta obra, en efecto, es considerada por muchos como la que inauguró la modernidad del pensamiento y la ciencia, pero a pesar de ello, el llamado sueño de Descartes de matematizarlo todo nunca llegó a materializarse, y hoy tenemos suficientes razones para pensar que nunca llegará a hacerlo.

En el siglo XX, las limitaciones de las matemáticas se hicieron evidentes, sobre todo por cuenta de la obra del lógico austriaco Kuert Gödel, quien, en una serie de trabajos publicados a partir de 1931, demostró cómo la matemática no solo era incompleta en

el sentido que en ella podrían existir verdades que no pueden demostrarse con sus propios métodos, sino además era incompleta en cuanto que su consistencia absoluta tampoco puede demostrarse.

Aunque los resultados de Gödel sacudieron los cimientos de las matemáticas, su efecto práctico fue menos devastador de lo que se pensó. La matemática continuó avanzando, y lo sigue haciendo hoy a un ritmo vertiginoso, ayudando de paso en la solución de problemas prácticos de toda índole. Todavía hay quienes quieren reducir todo a una ecuación o un teorema, pero, aun entre los matemáticos, existe la convicción de que no todo debe ni puede matematizarse. El economista canadiense John Kenneth Galbraith incluso llegó más lejos y escribió: "No hay duda (...) de que un compromiso prolongado con los ejercicios matemáticos en la economía puede ser dañino. Lleva al atrofiamiento del juicio y la intuición".

La respuesta a todo no es, entonces, un número, aunque tampoco nadie pone en duda que los números y las matemáticas en general tienen la capacidad de iluminar los asuntos de la vida práctica y la mente de una manera sorprendente. Examinando un día cualquiera en la vida de Iván X, pudimos comprobar cómo en efecto los números y otras criaturas matemáticas se hicieron presentes de una u otra forma en muchos de sus quehaceres, incluso al divertirse o reunirse con sus amigos.

Un examen de la vida de cualquier persona, ocupada en asuntos muy diferentes, arrojaría resultados iguales: la matemática se asomaría por todos lados. Una razón es que, a pesar de que como hemos visto no todo se puede matematizar, muchos aspectos de la realidad sí se entienden mejor en el lenguaje matemático. La probabilidad, por ejemplo, nos ayuda a entender por qué casi nunca nos ganamos la lotería, la geometría del espacio nos explica en parte las estaciones climáticas terrestres y por qué ocurren los




eclipses, el cálculo diferencial nos dice por qué un terreno circular tiene mayor área que uno rectangular con el mismo perímetro, y la teoría de los grafos explica por qué se congestiona el tráfico en las ciudades.

Y no solo eso, muchas cosas se pueden hacer mejor utilizando las herramientas de las matemáticas: mejores puentes, mejores edificios, mejores carreteras, mejores seguros de salud y planes de pensión y mejores créditos hipotecarios. El computador, por ejemplo, sin el cual la vida contemporánea sería muy diferente, está construido sobre unos cimientos que son esencialmente matemáticos. Mientras más avanzados sean estos cimientos, más poderoso y eficiente será el aparato que tenemos sobre el escritorio. Esto quizás explique por qué se le facilita tanto su manejo a alguien con una buena formación matemática.

Sin duda, la formación de Iván como abogado lo preparó para desempeñarse de manera competente no solo en su profesión, sino como ciudadano activo y miembro de una sociedad compleja. Sus conocimientos en su campo de estudio son tan indispensables y útiles que los de cualquier otro profesional. Sin embargo, eso no significa que pueda prescindir por completo, como alguna vez pretendió, de todo lo que aprendió y podría aprender en otro campo del conocimiento, como el de la matemática; de la misma forma en que ningún matemático, físico o ingeniero puede despreciar o descuidar su formación humanística y filosófica. Las ciencias, entre ellas las matemáticas y las humanidades, se complementan entre sí. Sin las últimas nos convertimos en robots, sin las primeras en primates semicultos.



Tomado de Recamán, B. (2004). *Ciencia Explicada. Matemáticas.* Bogotá: Stilo Impresores Ltda.

**Bernardo Recamán Santos** (1954). Matemático colombiano. Entre sus obras destacan *Póngame un problema* y *Los números, una historia para contar.*

